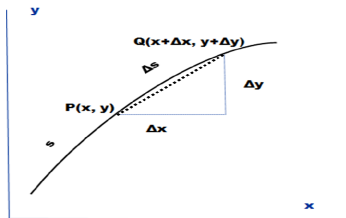


A. Dérivée de la longueur d'un arc



$$(1) s'(x) = \frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$(2) s'(y) = \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Démonstration :

$$(0) PQ^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\frac{PQ^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} = \frac{\Delta s^2}{PQ^2} \cdot \frac{PQ^2}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} = \frac{\Delta s^2}{PQ^2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$

Lemme:

Lorsque P tend vers Q, la valeur infinitésimale de l'abscisse curviligne se rapproche de celle de la corde sous-tendue PQ.

Soit

$$\lim_{\Delta PQ \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{PQ} \rightarrow 1$$

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} \approx 1 * \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} \approx \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$

$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2$$

En admettant le lemme ayant pour valeur limite 1, on obtient:

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2}} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

Ce qui d'ailleurs vérifie le lemme:

$$\lim_{\Delta PQ \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{PQ} = \frac{ds}{PQ} = \frac{dx * \pm \sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2}}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{d^2x \left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right)}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\pm \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm 1$$

prenant la valeur positive si l'on parcourt dans le sens algébrique positif, le lemme est vérifié.

Longueur de l'arc:

La longueur de l'arc peut être obtenue par intégration,

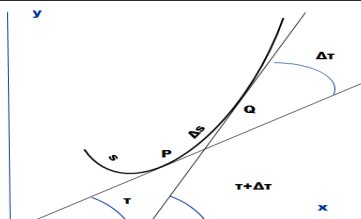
$$ds = \pm \sqrt{1 + f'^2(x)} * dx$$

On intègre ds comme un module et non comme une valeur orientée

$$\int ds = \int \sqrt{1 + f'^2(x)} * dx$$

B. La courbure K d'une courbe $y = f(x)$ représente le taux de la variation de la direction par unité de longueur de l'arc s. (angle d'inclinaison τ de la tangente en P)

$$(3) \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Démonstration :

$$\operatorname{tg}(\tau) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\tau = \arctg(y'(x)) = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Selon la règle de dérivation on a : (a) $\frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{d\tau(s)}{dx} \cdot \frac{dx(s)}{ds}$

(4) dérivée de l'arc tangent

$$\text{soit } u = \operatorname{tg}(y) \Rightarrow y = \arctg(u) \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{d\operatorname{tg}(y)}{dx} = \frac{d\operatorname{tg}(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (b) \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 y) \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + u^2) \cdot y' = u'. \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2} = (c) \arctg'(u) = \frac{d\arctg(u)}{du}$$

$$(b) \frac{d(\operatorname{tg} y)}{dy} = \frac{d\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)}{dy} = \frac{\sin' y \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos' y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

ou plus simplement la dérivée de la réciproque =
dérivée de la fonction divisée par
1 + le carré de la fonction)

Or

$$\tau = \arctg(y'(x)) = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

et d'après (c) :

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d \arctg(y')}{dx} = \frac{(y')'}{1+y'^2}$$

et selon (1) l'inverse de la dérivée d'un arc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

(a) devient d'après (4)(b)(c) :

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{d\tau(s)}{dx} \cdot \frac{dx(s)}{ds} = \frac{(y')'}{1+y'^2} * \frac{1}{(1+f'^2(x))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} * \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \left(x + \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}, y - \frac{\frac{dx}{dy} * \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right)}{\frac{d^2x}{dy^2}} \right)$$

Soit:

- Comme: