

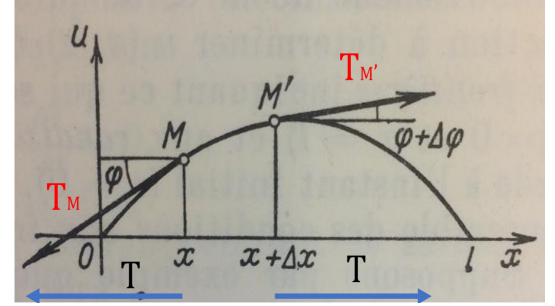
Exercice complémentaire 1

Trouver un développement mathématique simple, montrant que la vitesse d'une corde vibrante est proportionnelle à la racine carré du rapport de la tension et de la masse linéique.

Solution :

On doit montrer que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Définissons d'abord la masse linéique, c'est la masse d'une unité de longueur que l'on considère comme constante, donc : $\mu = \frac{dm}{dl}$



Essayons de déterminer l'équation du mouvement de la corde.

Prenons une portion infinitésimale de corde. D'après le premier principe de Newton, puisque la corde est considérée comme tendue et non déformable, la force s'exerçant sur la corde égale la somme des tensions. Donc on a d'une part :

$$F_u = T'_M \sin(\phi + \Delta\phi) - T_M \sin \phi$$

Et comme la corde subit une tension égale de part et d'autre de projection T sur x, on a également : $T = T'_M \cos(\phi + \Delta\phi) = T_M \cos \phi$

$$\text{donc , } F_u = T'_M \sin(\phi + \Delta\phi) - T_M \sin \phi = T \frac{\sin(\phi + \Delta\phi)}{\cos(\phi + \Delta\phi)} - T \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = T(\tan(\phi + \Delta\phi) - \tan \phi)$$

La tangente de l'angle en un point étant la dérivée par rapport à x de la fonction u(x,t), l'équation devient :

$$T(\tan(\phi + \Delta\phi) - \tan \phi) = T \left(\frac{\delta u(x + \Delta x, t)}{\delta x} - \frac{\delta u(x, t)}{\delta x} \right) = \frac{T}{\delta x} (\delta u(x + \Delta x, t) - \delta u(x, t))$$

et comme selon le théorème de Lagrange $\Delta Y \approx Y' * \Delta x$ alors :

$$\approx \frac{T}{\delta x} \frac{\delta}{\delta x} (\delta u(x + \Delta x, t) - \delta u(x, t)) * \Delta x \approx T \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} * \Delta x$$

D'autre part, la force extérieure exercée sur la corde étant :

$$F = m * a = \mu \Delta x \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \text{ On a alors : } \boxed{T \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} * \Delta x = \mu \Delta x \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}}$$

En simplifiant plus un subterfuge de simplification symbolique on obtient :

$\delta\left(\frac{x^2}{t^2}\right) = \frac{T}{\mu}$ Or, x/t a la dimension d'une vitesse, la vitesse théorique longitudinale de la corde, donc :

$$\boxed{\delta\left(\frac{x^2}{t^2}\right) \doteq v^2 = \frac{T}{\mu}}$$