

1-7 Le tube d'un thermomètre a une section de 0.02 mm². La capsule a un volume intérieur de 0.5 cm³. Elle est remplie d'alcool. A 0 °C, le niveau de l'alcool est au bas du tube. A quelle température doit-il être porté pour que le liquide s'élève de 12 cm ?

Solution

Ici on a le problème inverse de l'exercice 1-6. On calcule le volume corrigé à partir des données de la hauteur et de la section interne du tube, puis on détermine la température finale permettant une telle élévation. ($\gamma_h = 7.2 * 10^{-4}[K^{-1}]$)

$$\Delta V_{\text{corrigé}} = \sigma.h = 0.02 * 120[mm^3] = 2.4[mm^3]$$

$$\Delta V_{\text{corr.}} = \Delta V - \Delta V_{\text{verre}} \Rightarrow \Delta V_{\text{corrigé}} = V_1.(\gamma_{\text{mercure}} - \gamma_{\text{verre}}).(\Theta_f - \Theta_i)$$

$$\Theta_f = -\Theta_i + \frac{\Delta V_{\text{corrigé}}}{V_1.(\gamma_{\text{mercure}} - \gamma_{\text{verre}})} = 20[^\circ C] + \frac{2.4 * 10^4}{500 * (1.8 - 0.26)}[C] = 31.2[^\circ C]$$

Remarque : si on ne tient pas compte de la dilatation du verre, le résultat devient :

$$\Theta_f = -\Theta_i + \frac{\Delta V}{V_1.\gamma_{\text{mercure}}} = 20[C] + \frac{2.4 * 10^4}{500 * 1.8}[C] = 26.7[C]$$

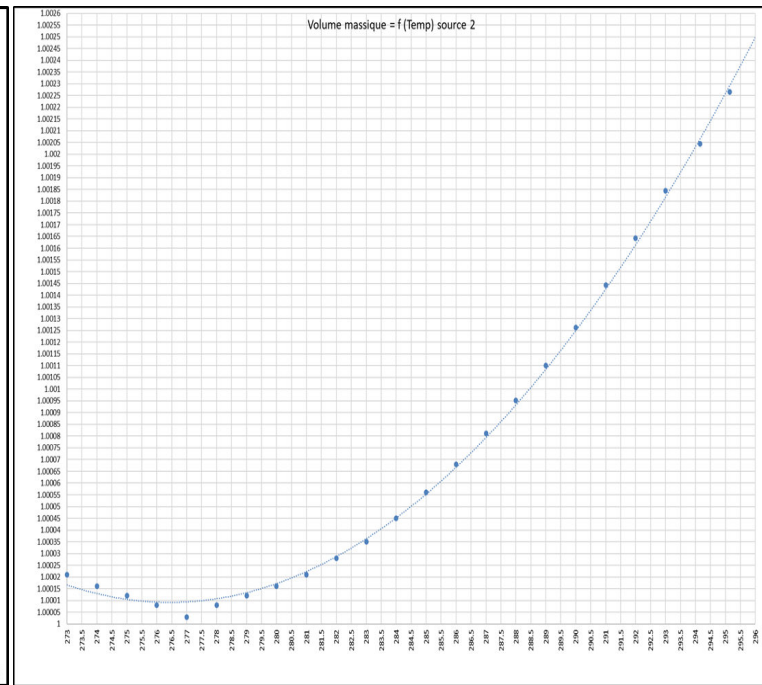
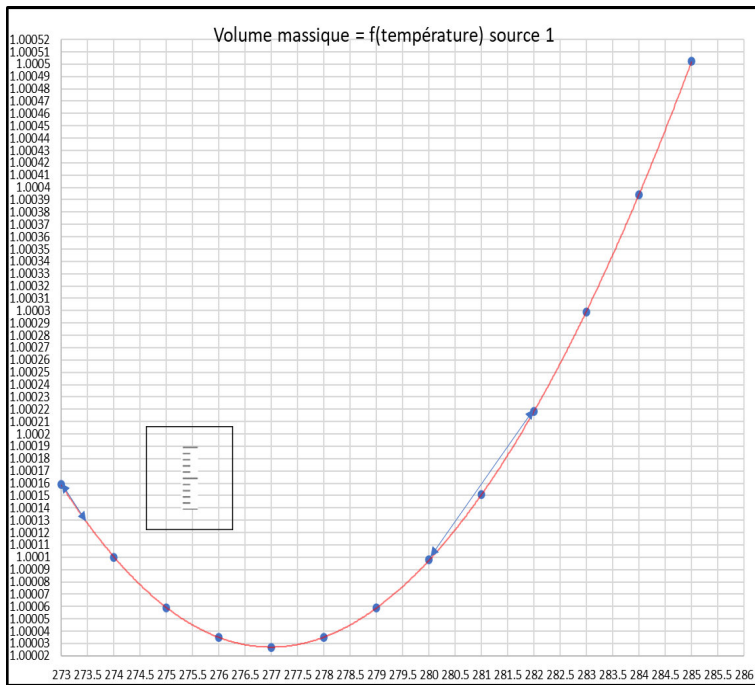
1-8 D'après une table fournissant les volumes d'une certaine masse d'eau en fonction de sa température, calculer le coefficient de dilatation de l'eau aux températures de 0, 4, 8 et 12 °C.

Développement du problème (révision future)

Les tableaux suivants contiennent deux listes collectées en ligne des valeurs des densités de l'eau entre 0 et 23 °C. On peut effectuer différents calculs pour obtenir d'abord les volumes et les coefficients de dilatations selon différentes méthodes de calculs ainsi que les variations relatives compte tenu du constat que le coefficient calculé n'est pas constant dans la plage de température recherchée.

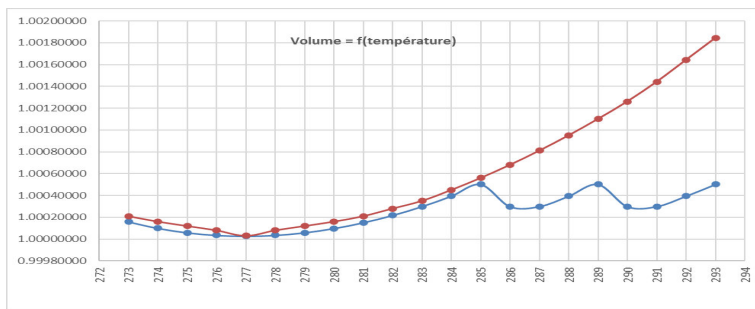
														Méthode graphique							
														Dans un intervalle de +/- 0.5°C autour de 8 , +0.5°C pour 0, 4 et 12 °C							
														pente ~ ΔV/(V moy.ΔT) [Th. de Lagrange v. dérivées]							
Relat à 20°C																					
Val 20 donnée														Par approximation d'1 degré		(ai+1- ai)/ai					
T (°C)	Densité (kg/l)	Diff. Succes.	T°K	Vo. Mass. (l/kg)	alpha (1/°C)	Diff. Relat	T°K	alpha (1/°C)	Diff relat succ	T°K	alpha (1/°C)	Différence rel.	T°K	V-1	(Vi-Moy (Vi;Vi+1))/(Moy (Vi;Vi+1)*0.5)	Ln (1/V) Ln (V)	α T	Différence			
														V. Mas. (l/kg)	alpha (1/°C)						
0	0.999841		273	1.000159025	1.72E-05	1124%	273	5.90E-05		273.2	6.20417E-05		273.2	0.00015903	5.90E-05	-1.59E-04	0.03	-3.24E-02			
1	0.999900	0.00006	274	1.00010001	2.12E-05	892%	274	4.10E-05	-31%	274.2	9.89899E-05	60%	274.2	0.00010001	4.10E-05	-1.00E-04	0.02	-2.25E-02			
2	0.999941	0.00004	275	1.000059003	2.46E-05	753%	275	2.40E-05	-41%	275.2	6.39961E-05	-35%	275.2	5.9003E-05	2.40E-05	-5.90E-05	0.01	-1.32E-02			
3	0.999965	0.00002	276	1.000035001	2.75E-05	664%	276	8.00E-06	-67%	276.2			276.2	3.5001E-05	8.00E-06	-3.50E-05	0.00	-4.43E-03			
4	0.999973	0.00001	277	1.000027001	2.97E-05	607%	277	8.00E-06	0%	277.2	5.00E-06		277.2	2.7001E-05	-8.00E-06	-2.70E-05	0.00	-4.43E-03			
5	0.999965	-0.00001	278	1.000035001	3.11E-05	574%	278	2.40E-05	200%	278.2			278.2	3.5001E-05	-2.40E-05	3.50E-05	0.01	-1.32E-02			
6	0.999941	-0.00002	279	1.000059003	3.16E-05	564%	279	3.90E-05	63%	279.2			279.2	5.9003E-05	-3.90E-05	5.90E-05	0.02	-2.15E-02			
7	0.999902	-0.00004	280	1.00009801	3.11E-05	576%	280	5.30E-05	36%	280.2			280.2	9.801E-05	-5.30E-05	9.80E-05	0.03	-2.92E-02			
8	0.999849	-0.00005	281	1.000151023	2.93E-05	618%	281	6.70E-05	26%	281.2	6.04908E-05		281.2	0.00015102	-6.70E-05	1.51E-04	0.04	-3.70E-02			
9	0.999782	-0.00007	282	1.000218048	2.58E-05	713%	282	8.10E-05	21%	282.2			282.2	0.00021805	-8.10E-05	2.18E-04	0.04	-4.48E-02			
10	0.999701	-0.00008	283	1.000299089	2.03E-05	934%	283	9.50E-05	17%	283.2			283.2	0.00029909	-9.50E-05	2.99E-04	0.05	-5.26E-02			
11	0.999606	-0.00009	284	1.000394155	1.20E-05	1649%	284	1.08E-04	14%	284.2			284.2	0.00039416	-1.08E-04	3.94E-04	0.06	-5.98E-02			
12	0.999498	-0.00011	285	1.000502252	0.00E+00	#DIV/0!	285	-2.03E-04	-288%	285.2	1.10E-04		285.2	0.00050225	2.03E-04	5.02E-04	-0.11	1.14E-01			
13	0.999701	0.00020	286	1.000299089	2.90E-05	624%	286	0.00E+00	-100%	286.2			286.2	1.00029909	0.00E+00	2.99E-04	0.00	2.99E-04			
14	0.999701	0.00000	287	1.000299089	3.38E-05	521%	287	9.50E-05	0%	287.2			287.2	1.00029909	-9.50E-05	2.99E-04	0.05	-5.29E-02			
15	0.999606	-0.00009	288	1.000394155	2.16E-05	872%	288	1.08E-04	14%	288.2			288.2	1.00039416	-1.08E-04	3.94E-04	0.06	-6.02E-02			
16	0.999498	-0.00011	289	1.000502252	0.00E+00	#DIV/0!	289	-2.03E-04	-288%	289.2			289.2	1.00050225	2.03E-04	5.02E-04	-0.11	1.15E-01			
17	0.999701	0.00020	290	1.000299089	6.77E-05	210%	290	0.00E+00	-100%	290.2			290.2	1.00029909	0.00E+00	2.99E-04	0.00	2.99E-04			
18	0.999701	0.00000	291	1.000299089	1.02E-04	107%	291	9.50E-05	0%	291.2			291.2	1.00029909	-9.50E-05	2.99E-04	0.05	-5.33E-02			
19	0.999606	-0.00009	292	1.000394155	1.08E-04	94%	292	1.08E-04	14%	292.2			292.2	1.00039416	-1.08E-04	3.94E-04	0.06	-6.07E-02			
20	0.999498	-0.00011	293	1.000502252	2.10E-04	0%	293			293.2			293.2	1.00050225	2.58E-04	5.02E-04	0.00	5.02E-04			

Relat à 20°C										{ai+1- ai}/ai								
Val 20 donnée										Par approximation d'1 degré			Méthode graphique					
T (°C)	Densité (kg/l)	Diff. Succes.	T°C	Vo. Mass. (l/kg)	alpha (1/°C)	Diff. Relat	T°C	alpha (1/°C)	Diff relat succ	T°C	alpha (1/°C)	Différence rel.	T°C	V. Mas. (l/kg)	(Vi-Moy (Vi;Vi+1))/(Moy (Vi;Vi+1)*0.5)	Ln (1/V) Ln (V)	α T	Différence
0	0.999790		273	1.000210044	8.15E-05	158%	273	0.0000500		273.2	5.01E-05		273	0.00021004	5.00E-05	-2.10E-04	0.03	-2.75E-02
1	0.999840	0.00005	274	1.000160026	8.84E-05	137%	274	0.0000400	-20%	274.2			274	0.00016003	4.00E-05	-1.60E-04	0.02	-2.20E-02
2	0.999880	0.00004	275	1.000120014	9.56E-05	120%	275	0.0000400	0%	275.2			275	0.00012001	4.00E-05	-1.20E-04	0.02	-2.20E-02
3	0.999920	0.00004	276	1.000080006	1.04E-04	103%	276	0.0000500	25%	276.2			276	8.0006E-05	5.00E-05	-8.00E-05	0.03	-2.75E-02
4	0.999970	0.00005	277	1.000030001	1.13E-04	86%	277	0.0000500	0%	277.2	1.04E-03		277	3.0001E-05	5.00E-05	-3.00E-05	0.03	-2.75E-02
5	0.999920	-0.00005	278	1.000080006	1.17E-04	79%	278	0.0000400	-20%	278.2			278	8.0006E-05	4.00E-05	8.00E-05	0.02	-2.20E-02
6	0.999880	-0.00004	279	1.000120014	1.23E-04	71%	279	0.0000400	0%	279.2			279	0.00012001	4.00E-05	1.20E-04	0.02	-2.20E-02
7	0.999840	-0.00004	280	1.000160026	1.29E-04	62%	280	0.0000500	25%	280.2			280	0.00016003	5.00E-05	1.60E-04	0.03	-2.75E-02
8	0.999790	-0.00005	281	1.000210044	1.36E-04	55%	281	0.0000700	40%	281.2	5.99871E-05		281	0.00021004	7.00E-05	2.10E-04	0.04	-3.86E-02
9	0.999720	-0.00007	282	1.000280078	1.42E-04	48%	282	0.0000700	0%	282.2			282	0.00028008	7.00E-05	2.80E-04	0.04	-3.86E-02
10	0.999650	-0.00007	283	1.000350123	1.49E-04	41%	283	0.0001000	43%	283.2			283	0.00035012	1.00E-04	3.50E-04	0.06	-5.53E-02
11	0.999550	-0.00010	284	1.000450203	1.55E-04	36%	284	0.0001101	10%	284.2			284	0.0004502	1.10E-04	4.50E-04	0.06	-6.09E-02
12	0.999440	-0.00011	285	1.000560314	1.60E-04	31%	285	0.0001201	9%	285.2	1.21E-04		285	0.00056031	1.20E-04	5.60E-04	0.07	-6.65E-02
13	0.999320	-0.00012	286	1.000680463	1.66E-04	27%	286	0.0001301	8%	286.2			286	0.00068046	1.30E-04	6.80E-04	0.07	-7.21E-02
14	0.999190	-0.00013	287	1.000810657	1.72E-04	22%	287	0.0001401	8%	287.2			287	0.00081066	1.40E-04	8.10E-04	0.08	-7.77E-02
15	0.999050	-0.00014	288	1.000950903	1.78E-04	18%	288	0.0001502	7%	288.2			288	0.0009509	1.50E-04	9.50E-04	0.08	-8.33E-02
16	0.998900	-0.00015	289	1.001101211	1.85E-04	13%	289	0.0001602	7%	289.2			289	0.00110121	1.60E-04	1.10E-03	0.09	-8.90E-02
17	0.998740	-0.00016	290	1.00126159	1.94E-04	8%	290	0.0001803	13%	290.2			290	0.00126159	1.80E-04	1.26E-03	0.10	-1.00E-01
18	0.998560	-0.00018	291	1.001442077	2.00E-04	5%	291	0.0002003	0%	291.2			291	0.00144208	2.00E-04	1.44E-03	0.11	-1.12E-01
19	0.998360	-0.00020	292	1.001642694	2.00E-04	5%	292	0.0002004	0%	292.2			292	0.00164269	2.00E-04	1.64E-03	0.11	-1.12E-01
20	0.998160	-0.00020	293	1.001843392	2.10E-04	0%	293	0.0002004	0%	293.2			293	0.00184339	2.00E-04	1.84E-03	0.11	-1.12E-01
21	0.997960	-0.00020	294	1.00204417			21	0.0002205	10%				21	0.00204417	2.20E-04	2.04E-03	0.13	-1.23E-01
22	0.997740	-0.00022	295	1.002265119			22	0.0002406	9%				22	0.00226512	2.41E-04	2.26E-03	0.14	-1.34E-01
23	0.997500		296	1.002506266			23						23	0.00250627		2.50E-03	0.00	2.50E-03



Fiabilité des données :

Selon les techniques expérimentales d'estimation de ces valeurs et la précision de la méthode, on peut trouver des valeurs différentes, comme c'est le cas ici. On a toutefois une bonne corrélation entre les deux séries de valeurs dans la plage de 0 à 12 °C, comme le montre le graphique ci-dessous. Ce qui signifie qu'à l'exception des valeurs autour de 4°C, la différence correspond à un écart systématique entre les deux sources. Sans la connaissance de la physique de l'eau on ne peut toutefois pas tirer de conclusion claire, mais supposer que cette concordance est le signe que l'on a des valeurs qui sont une bonne approximation des valeurs vraies. Il faut interpréter les résultats de calculs effectués pour chaque source et interpréter le résultat à partir de notre paradigme de recherche qui est le coefficient de dilatation considéré a priori comme constant dans le cours.



Graphique de comparatif des volumes en fonction de la température pour les deux sources de données. Les valeurs diffèrent d'une constante à l'exception du volume à 4 °C. A défaut de pouvoir refaire des expériences avec les méthodes et protocoles identiques et apporter une interprétation du résultat, on peut toutefois après interprétation des résultats de différents calculs élaborer des hypothèses sur cette différence autour de 4 °C .

On peut calculer le coefficient en partant du présumé qu'il est constant dans la plage de température de 0 à 20 °C, sans aucune autre connaissance de la particularité de la physique de l'eau en se basant sur les principes de dilatation des liquides et solides, de leur formules. On se réfère à la valeur du coefficient donnée dans le manuel à 20 °C et on détermine celui-ci pour les 4 autres températures en employant la formule de dilatation avec le coefficient comme variable dépendante.

D'après la théorie on peut écrire :

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0 * \Delta T} = \frac{V_r - V_x}{V_r * (T_r - T_x)} \quad (r = 20^\circ\text{C}) \quad ER = \frac{\alpha_r - \alpha_x}{\alpha_r} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i} \text{ variation ou erreur relative}$$

Méthode de calcul par référence à 20°C (tables 1 et 2, source 1 (S1) et 2 (S2))

Sur la plage de 0 à 20°C, on constate qu'en se référant à la valeur à $V^\circ = 20^\circ\text{C}$ ($\alpha = 0.00021$) donnée par le manuel, la variation du coefficient est assez importante, jusqu'à 1600 % en valeur relative pour S1 et de moins de 150 % pour la S2 et même moins de 55 % entre 8 et 12 °C. De plus à 19°C le coefficient approche alpha 20 dans S2, mais est de moitié de cette valeur dans S1. Selon la seconde méthode de calcul (v. plus bas) à l'exception de quelques points particuliers non congruents, ces variations sont de moins de 200 % contre moins de 40% .

On émet deux hypothèses, S1 ne fournit pas de valeurs précises compte tenu de l'hypothèse d'un coefficient relativement constant dans la plage de 0 à 20 °C (indication du manuel) ou que alpha est toujours variable mais dans ce cas sur la base de la constatation tirée de l'hypothèse de fiabilité et concordance des valeurs des deux sources, cette variation doit être équivalente. Or la plage de variabilité de S2 est relativement plus faible et même nulle entre 18 et 20°C selon la seconde méthode de calcul, alors que celle de S1 est très importante avec beaucoup d'incongruité. Si l'on compare les valeurs des volumes de S1 aux T°C de 10,13, 17, 18 , on constate que ce sont les mêmes. Partant du principe vu au cours que le volume de l'eau augmente avec T au-delà de 4°C, on peut conclure que ces valeurs sont très probablement fausses du moins au-delà de 12 °C, puisque elles ne varient pas de manière linéaire ou qu'il y a des propriétés particulières de l'eau à ces températures qui expliqueraient ces discontinuités. Mais on ne trouve pas ces discontinuités dans la source 2.

seconde méthode de calcul, variabilité sur des intervalles de 0.5-1 °C, et méthode graphique

Au vu des résultats, on admet donc que alpha n'est pas constant. On en veut cependant une estimation précise, les autres méthodes consistent alors à appliquer à nouveau la formule et d'effectuer un calcul d'approximation sur des intervalles réduits à 1 °C (ou 0.5 °C), par le calcul ou indirectement en interprétant le graphe de $V=f(T)$. Pour cette dernière méthode on utilise idéalement les graphes extrapolés d'un tableur (ici Excel), sur le graphe on relève les valeurs limites de volumes dans un intervalle de 0.5°C (par exemple au point de 0°C ou 4°C) ou 0.5°C / 1 °C (au point de 8°C), en utilisant une échelle pour plus de précision. (v. S1 ci-haut)

Ces méthodes reposent sur des constatations et sur le principes mathématiques suivants :

Plus l'intervalle de température est petit, plus celui du volume est petit et l'on peut faire l'approximation suivante et obtenir une valeur plus précise du coefficient autour de la température cible :

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \alpha = \pm \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V_0 * \Delta T} \approx \pm \frac{dV}{V} * \frac{1}{dT} \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \int \pm \alpha * dT \Rightarrow \ln(V) = \pm \alpha T + b$$

ou

$$\ln(1/V) = \alpha T + b, \text{ à } \theta \leq 4^\circ C, \ln(V) = \alpha T + b, \theta > 4^\circ C$$

Remarque : le coefficient est toujours pris positivement, pour un accroissement positif de température, la variation de volume est négative jusqu'à 4 °C et positive au-delà, pour avoir un coefficient positif il faut donc tenir compte de l'égalité des signes . On peut se permettre de cette approximation, puisqu'en observant la variation de volume sur un intervalle de 0.5 à 1 degrés, la sécante entre deux points épouse la courbe extrapolée. (v. maths définition de la dérivée théorème de Lagrange).

Par intégration des deux membres de l'équation réarrangé, on obtient une fonction affine entre T et ln de V, avec le coefficient de dilatation comme pente. Deux objections s'opposent à pouvoir déterminer la constante à partir de cette équation par méthode graphique ou par calcul. Le coefficient est une variable de la température comme on l'a vu, on donc une équation à trois variables et sa résolution si elle est possible dépasse le cadre du livre [v. fin](#). De plus, il n'y a pas de condition limite pour l'ordonnée à l'origine, on ne peut pas définir de volume à 0°K, en dessous de 273°K V est relativement constant. On peut toutefois prendre pour approximation dans la plage de 0 à 20°C, une **équation quadratique** avec un minimum à 4°C. Prenons la plage supérieure à 4°C :

$$\alpha T + b = \ln(V) = \ln(k + k'T + k''T^2) \Rightarrow \text{après dérivation}^2$$

$$\alpha = \frac{k' + 2k''T}{k + k'T + k''T^2} = \frac{-6.5588 * 10^{-4} + 2 * 1.183899 * 10^{-6} (\theta + 273.15)}{k - 6.5588 * 10^{-4} (\theta + 273.15) + 1.183899 * 10^{-6} (\theta + 273.15)^2}$$

En posant pour k = 0.273 on s'approche des valeurs trouvées par approximation sur intervalle de 1 °C, sans toutefois épouser les points. Cette approximation reste toutefois grossière.

Le coefficient présente une constance au delà de 18 °C (S2 seconde méthode), le coefficient calculé sur l'intervalle supérieur reste constant jusqu'à 20 degré (0.00021, table 2 ou graphique 2 ci-dessous) et de 20 à 22 degrés, il varie de moins de 10 %, ce qui confirme partiellement l'affirmation du manuel pour cette plage. En effet selon une source autour de 25 degrés la pente de la droite coefficient-température devient assez faible (pas de calculs reportés). Deux Remarques : La valeur du coefficient pour 0°C avec la méthode d'approximation sur l'intervalle suivant de 1 °C a été calculé sur un intervalle de 0.5 degré et non 1 comme pour les autres valeurs, à -1° il y a un saut de structure physique (liquide solide).

2. Connaissant les coordonnées du point extrémum, on calcule les coefficients de l'équ. quadratique. V théorie cc solutions d'équations quadratiques
 $T_4 = 277 = \frac{-k'}{2k''}, V_4 \approx 1.00003[\frac{dm^3}{kg}] = k - \frac{k'^2}{4k''} = V_0 - \frac{k'}{2k''} * \frac{k'}{2} = 0.90869[\frac{dm^3}{kg}] + 277 \frac{k'}{2} \Rightarrow k' \approx -6.5588 * 10^{-4} \text{ et } k'' \approx 1.183899 * 10^{-6}$

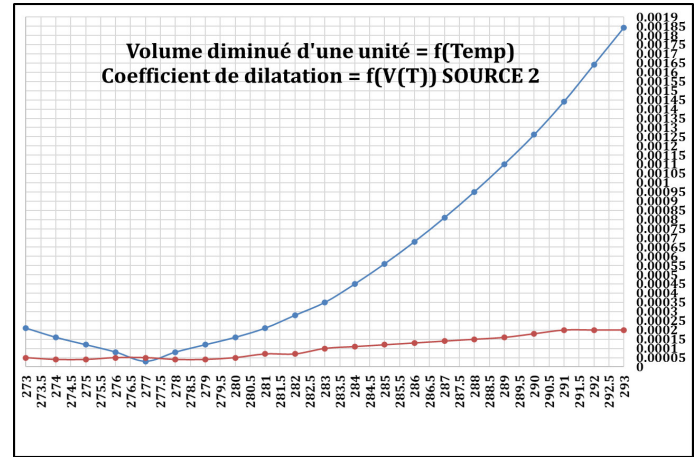
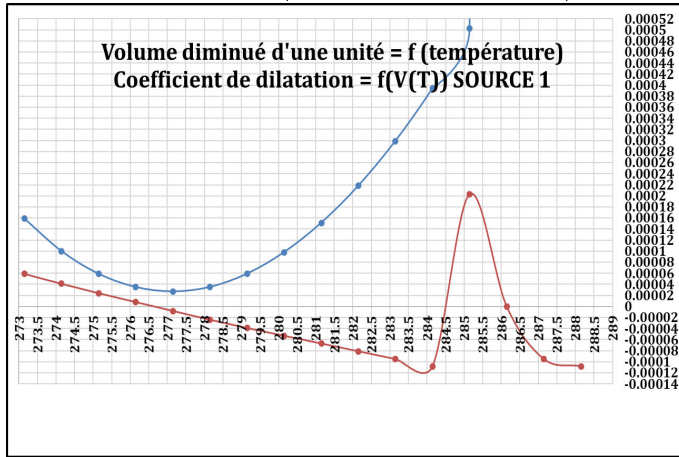
Autres méthodes d'approximation par calcul

Si on disposait des valeurs de V à des intervalles de température de 0.5°C, on aurait pu employer la moyenne suivante dans la détermination du coefficient, v ex. de l'Eq. ci-contre. L'estimation par approximation peut également être fait sur intervalle de 0.5° sur des moyennes de cet intervalle (v. formules, en-tête colonnes grisées S1 et S2 et les graphes correspondant ci-dessous). Cependant la variabilité par rapport à la première méthode est inférieur à 0.01 % .

$$\alpha_8 = \frac{V_8 - V_{7.5}}{V_{7.5} * 0.5} + \frac{V_{8.5} - V_8}{V_{8.5} * 0.5} \cdot \frac{1}{2}$$

Conclusion, résultats

Comme le montrent les graphiques extraits des données des colonnes des tables en conformité avec les raisonnements et confirmations mathématiques précédentes, le coefficient est donc variable et présente des plateaux de constance (S2, source fiable). Il est relativement constant autour de 20° . Valeurs de alpha selon un calcul sur un intervalle de 0.5 °C et des moyennes de valeurs (S1 S2 colonnes grisées)



Report des valeurs des coefficients par approximation de 1°C et erreurs relatives tirés des deux sources. Par la méthode graphique, le point à 12°C présente une différence de 14 % par rapport aux méthodes de calcul et à 4°C on obtient les même valeurs entre les secondes et troisième méthodes de calcul, mais on ne peut pas exploiter les points du graphe qui pour les deux sources s'écartent de la courbe d'approximation.

s	273° K	277° K	281° K	285° K
1	$5.9 * 10^{-5}$	$8 * 10^{-6}$	6.710^{-5}	$1.2 * 10^{-4}$
2	$5 * 10^{-5}$	$5 * 10^{-5}$	$7 * 10^{-5}$	$1.2 * 10^{-4}$
2	40%	40%	29%	17%

Calculs d'erreurs

Soit ϵ_1 et ϵ_2 : les erreurs absolues sur les volumes. On admet que l'on ne fait pas d'erreur sur la température puisqu'ici on estime l'erreur de alpha non sur l'expérience mais sur le calcul de V en fonction de T. On peut également poser que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = 1 * 10^{-5}$. C'est l'écart moyen sur la plage de 0 à 12°C entre V2 et V1 dans un intervalle de 1°C de S2. On a la valeur maximale du coefficient :

$$\alpha + EA_\alpha = \alpha_{max} = \frac{(V_2 + \epsilon_2) - (V_1 - \epsilon_1)}{(V_1 - \epsilon_1) * \Delta T} \Rightarrow 1 + ER_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{(V_2 + \epsilon_2) - (V_1 - \epsilon_1)}{(V_1 - \epsilon_1) * \Delta T}$$

$$ER_\alpha = \frac{(V_2 + \epsilon_2) - (V_1 - \epsilon_1) - \alpha * (V_1 - \epsilon_1) * \Delta T}{\alpha * (V_1 - \epsilon_1) * \Delta T} = \frac{V_2 - V_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \frac{(V_2 - V_1)}{V_1} * (V_1 - \epsilon_1)}{\frac{(V_2 - V_1)}{V_1} * (V_1 - \epsilon_1)}$$

$$ER_\alpha = \frac{\epsilon(V_1 + V_2)}{(V_2 - V_1)(V_1 - \epsilon)} \approx \frac{\epsilon * 2 * Moy(V_1, V_2)}{V_1^2 \alpha \Delta T}$$

Solution de l'équation à deux variables, méthode rigoureuse.

Dans la formule de la dilatation, on a 3 variables dont on en considère une comme constante et dont 2 sont exprimées à partir de deux valeurs relatives discrètes (V et T) :

On peut considérer la formule de deux couples de valeurs discontinues successives des deux variables et comme pour la résolution de séries tenter de déterminer des variables continues par des opérations de combinaisons diverses :

$$\frac{\Delta V_1}{V_i} = \frac{V_{i+1} - V_i}{V_i} = \alpha * (T_{i+1} - T_i) \text{ et } \frac{\Delta V_0}{V_{i-1}} = \frac{V_i - V_{i-1}}{V_{i-1}} = \alpha * (T_i - T_{i-1})$$

$$V_{i+1} - V_i + V_i - V_{i-1} = \alpha * V_i * (T_{i+1} - T_i) + \alpha * V_{i-1} * (T_i - T_{i-1}) \dots \text{etc}$$

Posons $V_i = V$, puisque ce qui sera valable pour V_i dans des limites définies sera valable pour tout V . Posons aussi que les différences de températures sont égales, admettons alors que lorsque cette différence approche zéro, celle entre les volumes sont équivalentes. En extrayant V après une addition entre les deux équations, quelques simplifications et réarrangements, on obtient alors :

$$2V_i = 2V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} (\Delta V + \frac{2\Delta V}{\alpha_T * \Delta T}) \Rightarrow V = \frac{dV}{2} + \frac{1}{\alpha_T} * V'_T = \frac{V * \alpha_T dT}{2} + \frac{1}{\alpha_T} * V'_T \Rightarrow$$

$$V * (\frac{2 - \alpha_T dT}{2}) = \frac{V'_T}{\alpha_T} \Rightarrow \alpha_T * (1 - \frac{\alpha_T dT}{2}) = \frac{V'_T}{V} \Rightarrow \alpha_T - \frac{\alpha_T^2 dT}{2} = \frac{V'_T}{V}$$

$$\alpha_T - \frac{\alpha_T^2 dT}{2} = \frac{d \ln(V)}{dT} \Rightarrow \alpha_T \approx -\frac{\alpha_T^2 T_2}{2} + \frac{\alpha_T^2 T_1}{2} + \frac{d \ln(V)}{dT} \text{ à la limite } (T_2 \approx T_1) \text{ et } \alpha_T = cte \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \ln(V)}{dT^2} = 0 \Rightarrow \ln(V) = kT + k'$$

On obtient évidemment le même résultat si l'on considère que le coefficient est invariable. Autrement, il faut résoudre :

$$\frac{d^2 \ln(V)}{dT^2} = \frac{d\alpha_T}{dT} \text{ ou } \ln(V) = \iint \frac{d\alpha_T}{dT} * dT.dT = \int \alpha_T dT$$