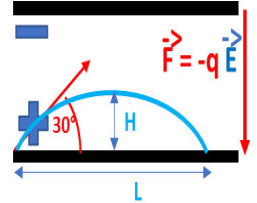


Chapitre 1. Interaction électrique. Développement des solutions à certains exercices.

1.10 Un électron est projeté dans un champ électrique vertical, dirigé vers le haut, de grandeur $5 \cdot 10^3 [N/C]$. La vitesse initiale de l'électron est de $10^7 [\frac{m}{s}]$ et fait un angle de 30° au-dessus de l'horizontale. (a) Calculer le temps mis par l'électron pour atteindre la hauteur maximum. (b) Calculer la hauteur maximum à laquelle l'électron s'élève verticalement au-dessus de sa hauteur initiale. (c) Après avoir franchi quelle distance horizontale l'électron rejoint-il sa hauteur initiale ? (d) Dessiner la trajectoire de l'électron.

Solution

Ce problème est un classique de la balistique et ressemble à l'exercice 1.9. On emploie ici également l'équation horaire et on détermine les différentes données recherchées. Pour simplifier, on place l'origine de l'électron sur la plaque positive d'un condensateur générant le champ dirigé vers le haut. L'électron suit un trajet parabolique (d)->



$$(a) \begin{cases} (1) \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \Rightarrow \begin{cases} Y = v_0 t \sin(30^\circ) - \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow Y' = v_0 \sin(30^\circ) - a_y t_H = 0 \\ X = v_0 t \cos(30^\circ) \end{cases} \\ (2) m \vec{a} = e \vec{E} \Rightarrow -a = -\frac{qE}{m} \Rightarrow (2) - > (1) \Rightarrow y_a = t_H = \frac{v_0 \sin(30^\circ)}{\frac{qE}{m}} = 5.685 [ns] \end{cases}$$

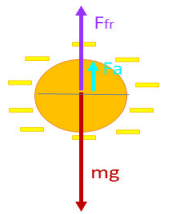
$$(b) Y_H = v_0 t_H \sin(30^\circ) - \frac{1}{2} a_y t_H^2 = 0.0142 [m]$$

$$(c) \begin{cases} (1) Y_L = 0 = v_0 t_L \sin(30^\circ) - \frac{1}{2} a_y t_L^2 \Rightarrow \begin{cases} t_L = 0 \\ t_L = \frac{2v_0 \sin(30^\circ)}{a} = \frac{2v_0 \sin(30^\circ)}{\frac{qE}{m}} = 1.13 \cdot 10^{-8} [s] \end{cases} \\ (2) X_L = v_0 t_L \cos(30^\circ) = 0.0985 [m] \end{cases}$$

1.11 Une gouttelette d'huile de masse $3 \cdot 10^{-14} [kg]$ et de rayon $2 \cdot 10^{-6} [m]$ porte 10 électrons en excès. Quelle est sa vitesse finale (a) lorsqu'elle tombe dans une région où il n'y a pas de champ électrique ? (b) lorsqu'elle tombe dans un champ électrique vertical dirigé vers le bas de grandeur $3 \cdot 10^5 [N/C]$? La viscosité de l'air est de $1.8 \cdot 10^{-5} [Pas]$. (On négligera la poussée d'Archimède)

Solution

L'énoncé du problème sous-entend que la vitesse initiale de la gouttelette d'huile est nulle. La goutte est dans un premier temps, en l'absence du champ, soumise à l'influence de la gravitation et de la poussée d'archimède. La force de frottement dépendant de la vitesse qui est nulle au départ et atteint selon l'énoncé une valeur limite en accord avec la seconde loi de Newton avec pour résultante des forces nulle, la vitesse finale étant admise constante. Dans un second temps, la force électrique s'ajoute aux autres forces, toujours avec la même condition finale. Nous pouvons donc poser les équations de Newton pour les deux cas :



$$(a) m \vec{g} + \vec{F}_{fr} = 0 \Rightarrow -mg - 6\pi\eta r v = 0 \Rightarrow v = \frac{-mg}{6\pi\eta r} = -4.337 \cdot 10^{-4} [\frac{m}{s}]$$

Avec la poussée d'Archimède. (masse volumique de l'huile, de l'air : 895.24, 1.29 kg/m³)

$$(a') m \vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_{fr} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r v = 0 \Rightarrow$$

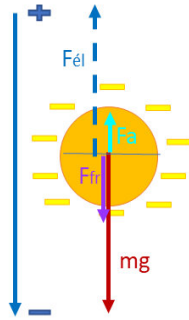
$$v = \frac{\frac{4}{3}r^2 g (\rho_a - \rho_h)}{6\eta} = -4.43307 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$(b) m \vec{g} + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow -mg - 6\pi \eta r v + 10e(-E) = -mg - 6\pi \eta r v - 10q(-E) = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{10qE - mg}{6\pi \eta r} = 2.74 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$(b') m \vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r v + 10qE = 0 \Rightarrow$$

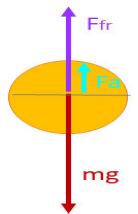
$$v = \frac{\frac{4}{3}r^3 \pi g (\rho_a - \rho_h) + 10qE}{6\eta \pi r} = 2.75 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$$



1.12 La chute d'1 mm d'une gouttelette d'huile chargée, dans l'appareil de Milikan, a lieu, en l'absence de champ électrique, en 27,4 s. La même goutte peut être maintenue en équilibre dans un champ de $2.37 \cdot 10^4 [N/C]$. Combien de charges électroniques en excès porte cette gouttelette ? La viscosité de l'air est de $1.8 \cdot 10^{-5} [N/C]$, les masses volumiques de l'huile et de l'air respectivement 800 [kg/m³] et 1,3 [kg/m³]. (La réponse du manuel est de n=2)

Solution

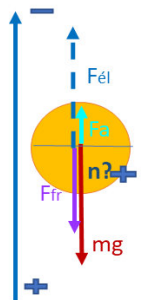
Cet exercice est similaire aux deux précédents. On présuppose que la vitesse moyenne de gouttelette calculée par le rapport de la distance parcourue en 27,4 seconde est égale à la vitesse limite. (La vitesse étant très lente, on peut admettre qu'une vitesse limite est très rapidement atteinte dans quel cas on peut appliquer la loi de Newton). Cette vitesse introduite dans l'équation de Newton pour la gouttelette en l'absence du champ permet de déterminer alors le rayon de la gouttelette. Cette valeur introduite dans la nouvelle équation comportant la force du champ nous permet de tirer alors la seule inconnue restante, la charge de la gouttelette.



$$\begin{cases} (1) \bar{v} = \frac{-d}{t} \\ (2) m \vec{g} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h \vec{g} + 6\pi \eta r \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_a - \rho_h) - 6\pi \eta r \bar{v} = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\frac{9\eta d}{2gt(\rho_h - \rho_a)}} = 6.14 \cdot 10^{-7} [m]$$

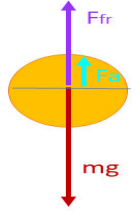
$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g + 6\pi \eta r \frac{-d}{t} + nqE = 0 \Rightarrow n = \frac{\frac{4\pi r^3 g}{3} (\rho_h - \rho_a) - 6\pi \eta r \frac{-d}{t}}{qE} = 4$$



1.13 Une gouttelette d'huile chargée tombe de 4 mm en 16 s avec une vitesse uniforme en l'absence de champ électrique. La masse volumique de l'huile est de 800 kg/m³, celle de l'air 1.3 kg/m³ et le coefficient de viscosité de l'air 1.8 Pas. (a) Calculer le rayon et la masse de la goutte. (b) Si la goutte porte une charge électronique en excès et se trouve dans un champ électrique de $2 \cdot 10^{-5} [N/C]$, quel est le rapport entre la force électrique agissant sur la goutte et son poids ?

Solution

Comme précédemment on pose pour la vitesse moyenne de gouttelette, le rapport de la distance au temps. Cette vitesse introduite dans l'équation de Newton pour la gouttelette en l'absence du champ permet de déterminer alors le rayon de la gouttelette et sa masse. Cette valeur introduite dans la nouvelle équation comportant la force du champ nous permet de la déterminer et de calculer le rapport de cette force à celle de la gravitation. (schéma ex préc. pour repère).



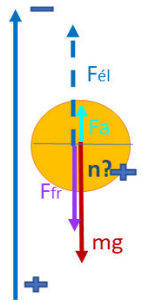
$$\begin{cases} (1) \bar{v} = \frac{-d}{t} \\ (2) m \vec{g} + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_h \vec{g} + 6 \pi \eta r \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_a - \rho_h) - 6 \pi \eta r \bar{v} = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\frac{9 \eta d}{2 g t (\rho_h - \rho_a)}} = 5.083 \cdot 10^{-4} [m]$$

$$M = \rho_h * \frac{4}{3} \pi r^3 = 4.4 \cdot 10^{-7} [kg]$$

$$-\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_h g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g + 6 \pi \eta r \frac{-d}{t} + F_{el} < n q E > = 0 \Rightarrow F_{el} = 8.62 \cdot 10^{-6} [N]$$

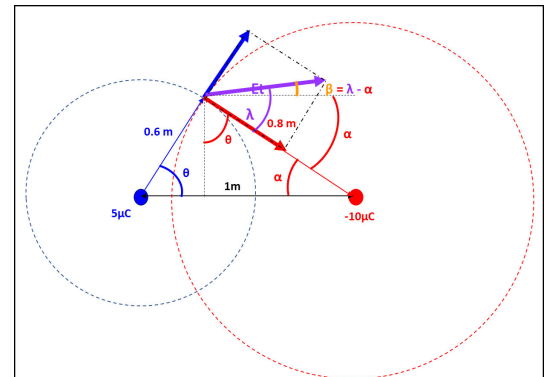
$$\frac{F_{el}}{M * g} = 1.99$$



1.14 Deux charges ponctuelles de respectivement 5 et -10 microcoulombs sont placés à 1m de distance. (a) Trouver la grandeur et la direction du champ à un point situé à 0.6m de la première charge et à 0.8m de la seconde. (b) Où le champ électrique dû à ces deux charges est-il nul ?

Solution

On esquisse une représentation vectorielle des champs générés par les deux charges. On trace deux cercles de rayons 0.6m et 0.8m à l'intersection desquels on cherche la valeur du champ résultant. Le vecteur champ du premier est dans le sens de ce point, le second dans le sens opposé, puisque la charge est négative. La direction du vecteur résultant est donnée par la relation géométrique des côtés du triangle formé par les vecteurs et sa grandeur par la norme.



$$(a) \begin{cases} (1) \text{Pythagore} \Rightarrow 0.6[m] * \cos(\theta) + 0.8[m] * \sin(\theta) = 1 \Rightarrow \\ (2) \text{théorème du sinus} \Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{0.8[m]} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta)}{0.6[m]} = \frac{\cos(\theta)}{0.6[m]} \Rightarrow \end{cases}$$

$$(2) - > (1) \quad \theta = 53.13^\circ \Rightarrow \alpha = 90 - 53.13^\circ = 36.87^\circ$$

$$E1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} = 1.25 \cdot 10^5 [N/C] \rightarrow E2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} = -1.406 \cdot 10^5 [V/m]$$

$$E = \sqrt{(E1^2 + E2^2)} = 1.88 \cdot 10^5 [N/C]$$

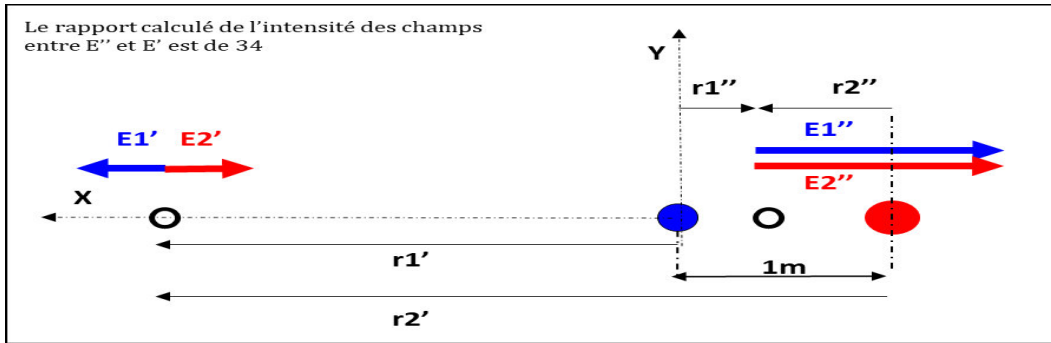
On peut trouver la direction du vecteur par le rapport de sa deuxième projection (E2) sur la norme du vecteur résultant (E) ou E2 sur E1 :

$$\lambda = \arccos\left(\frac{E2}{Et}\right) = \arctan\left(\frac{E1}{E2}\right) = 41.63^\circ \Rightarrow \beta = \lambda - \alpha = 41.63 - 36.87^\circ = 4.76^\circ$$

(b) La condition nécessaire pour que le champ résultant soit nul est que les vecteurs E1 et E2 soient de même intensité et opposés. Etant de sens opposés, les vecteurs doivent nécessairement être collinéaire, donc dans l'axe des deux charges. A égale distance entre les deux charges, le champ crée par la charge négative est plus fort et les champs ont même direction, donc le point de champ nul doit se trouver à gauche de la charge positive, à un point où le rapport charge-carré de la distance est équilibré. La distance est déterminée par l'équation d'égalité des deux champs :

$$\vec{E}_{1'} + \vec{E}_{2'} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon} * \left(\frac{q_1 * \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2 * \vec{r}_2}{r_2^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} * \left(\frac{q_1 * \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2 * (\vec{r}_1 + \vec{1})}{(r_1 + 1)^3} \right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(q_1 + q_2) * r_1^2 + 2q_1 r_1 + q_1 = 0 \Rightarrow \underline{r_1' = 2.414[m]}, r_1'' = -0.414[m]$$



L'orientation positive de r correspond à celle du champ positif dans la direction de gauche, r1' est la seule position conforme pour laquelle la résultante des champ est nulle, en effet, des calculs permettent de confirmer que les intensités des champs en r1'' sont égales mais de même sens, ne pouvant donc s'annuler.

$$\vec{E}_{1''} + \vec{E}_{2''} = \frac{1}{4\pi\epsilon} * \left(\frac{q_1 * \vec{r}_1''}{r_1''^3} + \frac{q_2 * \vec{r}_2''}{(r_1'' + 1)^3} \right) = k * \left(\frac{q_1 * \vec{r}_1''}{(-0.414)^3} \left(\frac{> 0 * < 0}{< 0} \right) + \frac{q_2 * (\vec{r}_1'' + \vec{1})}{(-0.414 + 1)^3} \left(\frac{< 0 * > 0}{< 0} \right) \right)$$

1.15 Dans un appareil destiné à mesurer la charge e d'un électron par la méthode de Millikan, un champ électrique de $6.34 \cdot 10^4 [N/C]$ est nécessaire pour maintenir une goutte d'huile en équilibre. Les plaques étant distantes de 1.5 cm. quelle différence de potentiel doit leur être appliqué ?

Solution

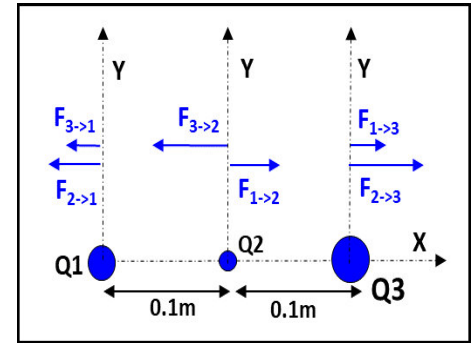
Le champ étant constant, la différence de potentiel est le produit de la distance à l'intensité du champ :

$$\delta V = \delta d * E = 0.015[m] * 6.34 \cdot 10^4 [N/C] = 951[V]$$

1.16 Trois charges positives de 0.2, 0.1 et de 0.3 microcoulombs sont disposées successivement à 0.1 m de distance sur un même axe. Calculer (a) la force résultant sur chaque charge de l'action des deux autres. (b) l'énergie potentielle de chaque charge due à la présence des deux autres, (c) l'Epot. interne du système. (d) Comparer (c) à la somme des valeurs trouvées en (b).

Solution

(a) Positionnons les charges respectivement de gauche à droite sur l'axe horizontal d'un repère orthonormé et pour simplifier le calcul relatif à chaque charge, posons la charge concernée à l'origine des coordonnées. Désignons les forces avec des indices $i \rightarrow j$ signifiant l'action de i sur j . Les charges étant toutes positives, le sens de la force générée par chaque charge va de la charge affectée dans le sens opposé à celle qui y exerce son action. Par convention on peut calculer les valeurs en valeurs algébriques, positives selon le sens de x afin d'obtenir le signe de la résultante des forces qui en indique le sens (on emploie le facteur $|r| / r^3$, avec $r > 0$ si $i > j$). La force totale est la somme du couple de forces.



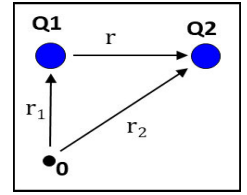
$$(a) \begin{cases} (a1) \overline{F_1} = \overline{F_{2 \rightarrow 1}} + \overline{F_{3 \rightarrow 1}} = \frac{q_1 * q_2 * |r_{2-1}|}{4\pi\epsilon r_{2-1}^3} + \frac{q_1 * q_3 * |r_{3-1}|}{4\pi\epsilon r_{3-1}^3} = -0.018[N] + -0.0135[N] = -0.0315[N] \\ (a2) \overline{F_2} = \overline{F_{1 \rightarrow 2}} + \overline{F_{3 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 * q_2 * |r_{1-2}|}{4\pi\epsilon r_{1-2}^3} + \frac{q_2 * q_3 * |r_{3-2}|}{4\pi\epsilon r_{3-2}^3} = 0.018[N] - 0.027[N] = -0.009[N] \\ (a3) \overline{F_3} = \overline{F_{1 \rightarrow 3}} + \overline{F_{2 \rightarrow 3}} = \frac{q_1 * q_3 * |r_{1-3}|}{4\pi\epsilon r_{1-3}^3} + \frac{q_2 * q_3 * |r_{2-3}|}{4\pi\epsilon r_{2-3}^3} = 0.0135[N] + 0.027[N] = 0.0405[N] \end{cases}$$

(b) Le potentiel électrique est défini comme l'énergie potentielle d'une charge placée en un point où s'exerce un champ, ici en l'occurrence par la présence des deux autres charges. Epot est le produit de la charge référence au potentiel de chaque charge par rapport à cette référence. La somme des potentiels des deux charges multiplié par la charge référence donne l'énergie potentielle de la charge en présence des deux autres.¹

$$(b) \begin{cases} (b1) E_{p1} = q_1 * (V_2 + V_3) = q_1 * \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{2-1}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{3-1}} \right) = 1.8 \cdot 10^{-3}[J] + 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = 4.5 \cdot 10^{-3}[J] \\ (b2) E_{p2} = q_2 * (V_1 + V_3) = q_2 * \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{1-2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{3-2}} \right) = 1.8 \cdot 10^{-3}[J] + 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = 4.5 \cdot 10^{-3}[J] \\ (b3) E_{p3} = q_3 * (V_1 + V_2) = q_3 * \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{1-3}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{2-3}} \right) = 2.7 \cdot 10^{-3}[J] + 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = 5.4 \cdot 10^{-3}[J] \end{cases}$$

1. Le signe du potentiel ne dépend que de la charge, on ne peut appliquer la même convention que pour les forces. En effet, si on avait 3 charges positives égales, avec cette convention l'énergie potentielle totale en 2 serait nulle, ($r_{1-2} > 0$, $r_{3-2} > 0$), c'est-à-dire que le champ total en ce point serait nul, donc nécessairement généré par deux charges de signes contraires.

(c) Au chapitre Dynamique du système de particules (phys Gén 1, mécanique et thermodynamique), l'auteur traite des forces extérieures et intérieures agissant sur les particules et l'ensemble du système (p. 227). Dans ce système, chaque particule subit la force d'une autre particule voisine (force interne), formalisée comme ci-haut F_{12} , F_{21} . L'énergie potentielle représentant le travail fourni ou nécessaire à une particule pour se déplacer d'un point à un autre, ici la force régissant ce travail étant la force créée par le champ électrique d'une particule sur une autre, l'énergie correspond donc à un travail électrostatique (p. 197, 241). On a ici 3 couples de particules en interactions dont la somme des travaux représente l'énergie potentielle interne du système.



En effet, considérons l'accroissement ou le différentiel de travail électrostatique entre une charge 1 et 2, on a (l'intégrale de l'inverse du carré scalaire de $\vec{x}$ est égale à moins inverse de x) :

$$\delta W_{ES} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\vec{r}_1 = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = -d\left(\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_o r}\right)$$

On a l'énergie potentielle à une constante près, (cte égale à 0 si le potentiel du point de référence est nul) :

$$E_{pot} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_o r} \text{ Aussi : } V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r}, \text{ donc : } E_{pot} = q_2 \cdot V_1 = q_1 \cdot V_2 = \frac{1}{2} \cdot (q_2 \cdot V_1 + q_1 \cdot V_2)$$

Pour notre problème, on considère évidemment aussi que le référentiel 0 est au potentiel 0 et l'on obtient :

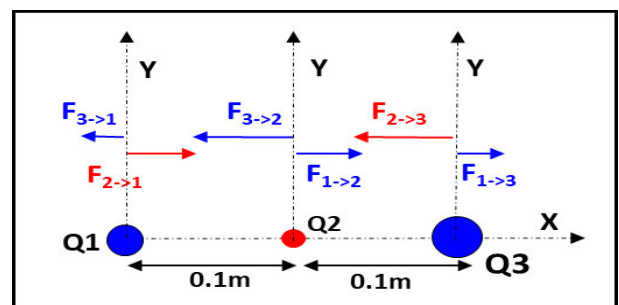
$$E_{pot.int.} = \frac{1}{2}(q_1 V_2 + q_2 V_1 + q_1 V_3 + q_3 V_1 + q_2 V_3 + q_3 V_2) = \frac{1}{2}(2q_1 V_2 + 2q_1 V_3 + 2q_2 V_3) = 7.2 \cdot 10^{-3} [J]$$

(d) La somme des termes de (b) est évidemment le double de l'énergie potentiel du système, puisqu'en b les termes comprennent deux fois chaque couple d'interaction.

1.17 Traiter l'exercice précédent pour le cas où la deuxième charge est changé de signe. Nouvel énoncé ; trois charges de 0.2, -0.1 et de 0.3 microcoulombs sont disposées successivement à 0.1 m de distance sur un même axe. Calculer (a) la force résultant sur chaque charge de l'action des deux autres. (b) l'énergie potentielle de chaque charge due à la présence des deux autres, (c) l'énergie potentielle interne du système.

Solution

(a)(b)(c) Les raisonnements sont les mêmes que dans l'exercice précédent. Ici la charge négative en deuxième position entraîne une inversion de sens de la force exercée par celle-ci sur les deux autres, devenant forces attractrices. On inverse simplement les signes de la charge concernée.

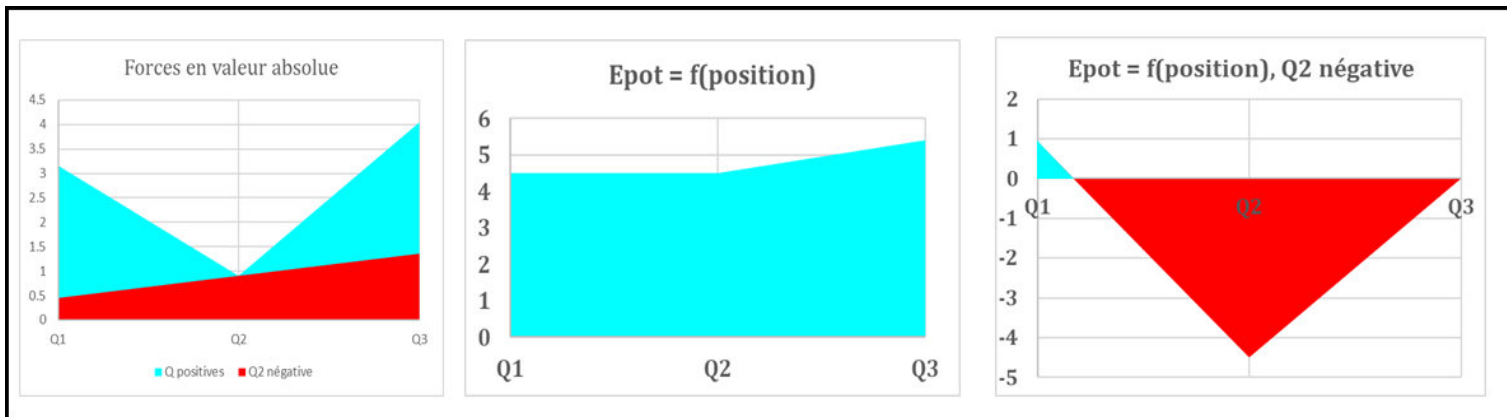


$$(a) \begin{cases} (a1) \overline{F_1} = \overline{F_{2 \rightarrow 1}} + \overline{F_{3 \rightarrow 1}} = \frac{q_1 * q_2 * |r_{2-1}|}{4\pi\epsilon r_{2-1}^3} + \frac{q_1 * q_3 * |r_{3-1}|}{4\pi\epsilon r_{3-1}^3} = 0.018[N] + -0.0135[N] = 0.0045[N] \\ (a2) \overline{F_2} = \overline{F_{1 \rightarrow 2}} + \overline{F_{3 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 * q_2 * |r_{1-2}|}{4\pi\epsilon r_{1-2}^3} + \frac{q_2 * q_3 * |r_{3-2}|}{4\pi\epsilon r_{3-2}^3} = -0.018[N] + 0.027[N] = 0.009[N] \\ (a3) \overline{F_3} = \overline{F_{1 \rightarrow 3}} + \overline{F_{2 \rightarrow 3}} = \frac{q_1 * q_3 * |r_{1-3}|}{4\pi\epsilon r_{1-3}^3} + \frac{q_2 * q_3 * |r_{2-3}|}{4\pi\epsilon r_{2-3}^3} = 0.0135[N] - 0.027[N] = -0.0135[N] \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (b1) E_{p1} = q_1(V_2 + V_3) = q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{2-1}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{3-1}}\right) = -1.8 \cdot 10^{-3}[J] + 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = 0.9 \cdot 10^{-3}[J] \\ (b2) E_{p2} = q_2(V_1 + V_3) = q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{1-2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{3-2}}\right) = -1.8 \cdot 10^{-3}[J] - 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = -4.5 \cdot 10^{-3}[J] \\ (b3) E_{p3} = q_3(V_1 + V_2) = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{1-3}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{2-3}}\right) = 2.7 \cdot 10^{-3}[J] + -2.7 \cdot 10^{-3}[J] = 0[J] \end{cases}$$

$$(c) E_{pot.int.} = q_1 V_2 + q_1 V_3 + q_2 V_3 = -1.8 \cdot 10^{-3}[J] + 2.7 \cdot 10^{-3}[J] - 2.7 \cdot 10^{-3}[J] = -1.8 \cdot 10^{-3}[J]^*$$

Remarques sur les deux exercices : Les énergies potentielles recherchées au points définis sont maximales lorsque les forces sont orientées dans le même sens et que la charge en ce point est positive. Dans le second cas, elle est minimale et négative au centre où la charge est négative. * L'énergie potentielle interne du système passe d'une valeur positive à une valeur "négative", sous-entendu que le système à un "potentiel d'attraction" relativement à la présence environnant d'une charge positive.



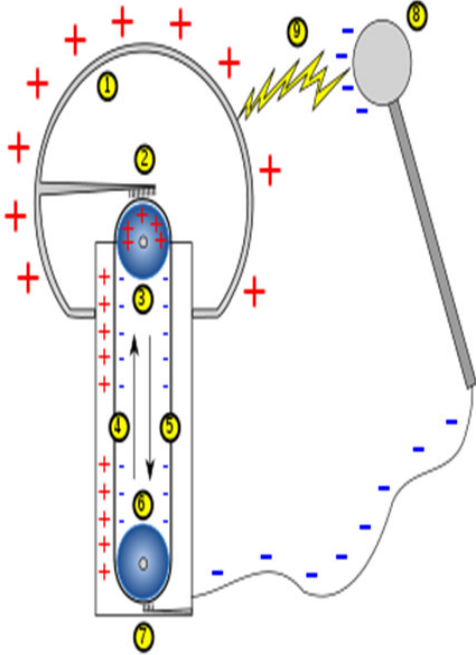
1.18 Le potentiel à une distance donnée d'une charge ponctuelle est de 600V et le champs de 200 N/C. (a) Quelle est cette distance ? (b) Quelle est la grandeur de la charge ?

Solution

La valeur d'un champ crée par une charge est donnée par la dérivée du potentiel par rapport à la distance. On se trouve dans la situation de champ crée par une charge ponctuelle, le champ est constant sur l'axe menant de la charge au point de référence, il est donc directement proportionnel au potentiel et inversement à la distance. De même le potentiel dépend du rapport de la charge et de la distance, on pose les équations :

$$\begin{cases} (1) E = \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x} \Rightarrow x = \frac{V}{E} = 3[m] \\ (2) V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow q = V * 4\pi\epsilon_0 r = 2 \cdot 10^{-7}[Cb] \end{cases}$$

1.19 La charge maximale que peut porter l'une des extrémités sphériques d'un grand générateur Van de Graaff est d'environ $\cdot 10^{-3}[C]$. Supposons qu'une charge positive de cette grandeur répartie uniformément sur la surface d'une sphère de 2.7 m de rayon dans l'espace vide. (a) Calculer la grandeur du champ électrique en un point extérieur à la sphère à 5 m de son centre. (b) Si l'on abandonnait un électron en ce point, quelle serait la grandeur et la direction de son accélération initiale? Quelle serait sa vitesse lorsqu'il atteindrait la sphère?



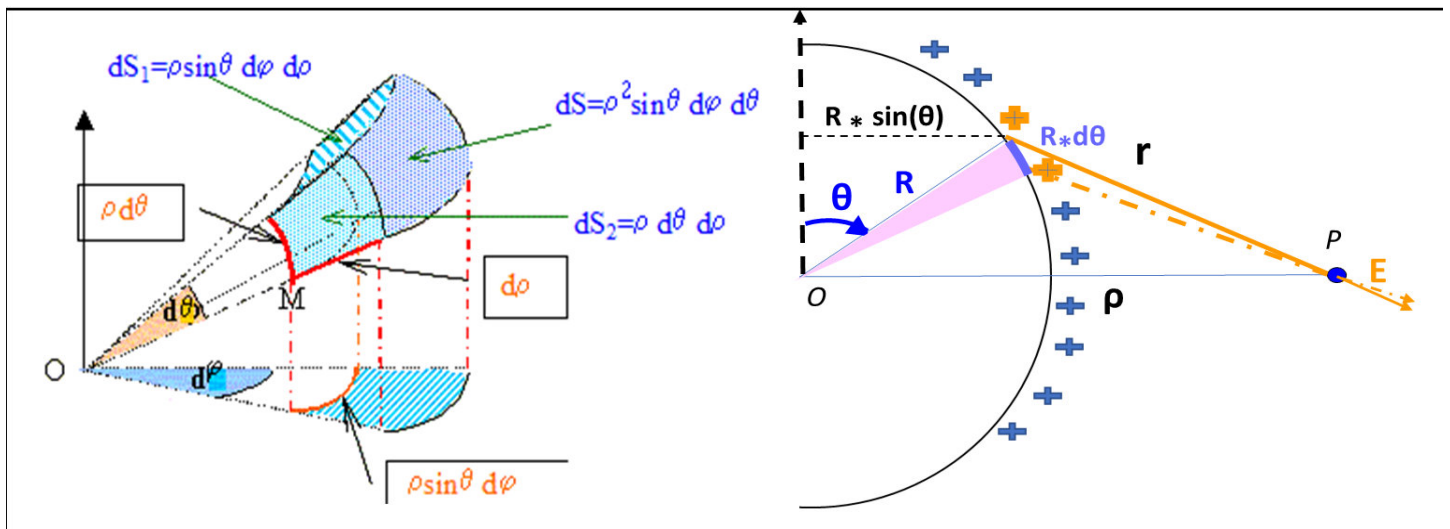
Sous sa forme la plus simple, le générateur de Van de Graaff vertical comprend une courroie en latex ou en tissu isolant qui fait fonction de convoyeur de charges électriques. Son mouvement est assuré par deux poulies cylindriques. L'une d'entre elles, le plus souvent en Plexiglas (polyméthacrylate de méthyle), en Téflon ou en Nylon, est dans la sphère métallique creuse. La sphère se trouve au sommet d'une colonne isolante qui contient la courroie. À la base du dispositif se trouve le moteur qui actionne la poulie motrice qui peut être en métal ou tournée dans un matériau isolant différent de celui de l'autre poulie.

Deux électrodes E1 (7) et E2 (2), sont placées respectivement juste en dessous de la poulie inférieure et à l'intérieur de la sphère. E2 est connectée à la sphère creuse et E1 permet d'obtenir un potentiel élevé par rapport à la terre. La différence de potentiel est en l'occurrence positive. Les deux électrodes sont munies de peignes (pointes «corona») qui sont au plus près de la courroie, sans la toucher, et permettent le déplacement des charges.

Cette tension élevée ionise l'air près de la pointe de E1 ce qui permet de pousser les charges positives vers la courroie et de permettre leur déplacement sur la face interne de l'enveloppe sphérique. Cette charge positive sur la sphère induit une charge négative sur l'électrode E2. La forte différence de potentiel ionise l'air à l'intérieur de la sphère et les charges négatives sont repoussées sur la courroie, ce qui a pour effet de la décharger. Selon le principe de la cage de Faraday, les charges positives de E2 migrent vers la sphère indépendamment de la tension existante à sa surface. Comme la courroie continue à tourner, un courant constant arrive par ce moyen en direction de la boule qui continue de recevoir des charges positives. Ce chargement se poursuit jusqu'à un certain point qui dépend des caractéristiques de la sphère. Plus l'enveloppe sphérique est grande, plus son potentiel est élevé. Avec une surface parfaite pour la boule métallique, la tension maximale est de l'ordre de 30 kV pour chaque centimètre de rayon. Cette valeur théorique n'est pas atteinte en pratique à cause des imperfections du système (surface irrégulière, pertes, etc.)

Solution

(a) Nous avons une sphère porteuse de charges positives qui crée un champ radial. On doit calculer l'intensité du champ à une distance de la surface de la sphère d'environ 2 fois le rayon de cette sphère. Compte tenu de cette faible distance entre la sphère et le point extérieur, on ne peut à priori pas assimiler la sphère à une charge ponctuelle. En ce point la grandeur du champ est égale à la somme des intensités de champ créées par les charges superficielles sur la demi-sphère dans la direction de ce point. On peut chercher le potentiel en ce point et calculer sa valeur comme l'intégrale des potentiels créés par des charges selon un élément de direction, un élément de surface et un élément de charge superficiel. Le champ est donnée ensuite par le gradient du potentiel. Représentons graphiquement la sphère et le point en 3 dimensions et projection, puis posons les équations :



On recherche le différentiel de potentiel au point P dépendant de l'élément de charge d'influence et de la distance entre cette charge au point donné. Posons l'équation et déterminons les variables indépendantes. On pose pour élément de charge le produit de la charge surfacique $Q/\text{surface}$ (valeur déduite de l'énoncé pour une sphère) et de l'élément de surface. L'élément de surface est donné par la géométrie, à la limite zéro des angles des coordonnées sphériques, il est égal au produit du rayon par le différentiel d'angle θ en latitude (ici choisi descendante, v. schéma) multiplié par la projection horizontal du rayon par le différentiel d'angle azimutal ϕ , càd le rayon par le sinus de θ multiplié par le différentiel azimutal $d\phi$. On trouve également la distance r entre le point P et le point de surface grâce au théorème du cosinus. Le potentiel est alors l'intégrale de ce différentiel. Les bornes de l'intégrale sont les limites des deux angles ; entre 0 et π pour la latitude descendante (l'axe x orienté verticalement dans le sens du haut) et 0 à 2π pour l'angle azimutal.

$$dV = k \frac{dQ}{r} = \frac{\sigma \cdot ds}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma \cdot R d\theta \cdot R \sin(\theta) \cdot d\phi}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V = \int dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \cdot R d\theta \cdot R \sin(\theta) \cdot d\phi}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) d\theta \cdot d\phi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)}} = \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d(-\cos(\theta)) \cdot d\phi \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)}}$$

en séparant les varibales et en modifiant le numérateur et le dénominateur de manière à obtenir une formule identique à celle sous la racine en exploitant les règles de dérivation des constantes ($d(a + b f(x)) = b f'(x)$), on obtient :

$$V = \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos(\theta))}{2R\rho \cdot \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)}} = \frac{Q \cdot 2\pi}{16R\rho\pi^2\epsilon_0 \cdot 2R\rho} \int_0^\pi \frac{d(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos(\theta))}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)}}$$

On applique la règle d'intégration à la puissance d'une fonction affine, ici la formule sous la racine :

$$\int (a + bt)^{-1/2} d(a + bt) = 2(a + bt)^{1/2} \Rightarrow V = \frac{Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos(\theta))^{1/2} \Big|_0^\pi$$

$$V = \frac{-Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot (R^2 + \rho^2 + 2R\rho)^{1/2} - (R^2 + \rho^2 - 2R\rho)^{1/2} = \frac{Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot ((R + \rho)^2)^{1/2} - (R - \rho)^2)^{1/2}$$

$$V = \frac{Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot (R + \rho) - |R - \rho| = \begin{cases} \frac{Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot 2\rho \text{ si } R > \rho \Rightarrow \text{potentiel à l'intérieur de la sphère} \\ \frac{Q}{8R\rho\pi\epsilon_0} \cdot 2R \text{ si } R < \rho \Rightarrow \text{potentiel à l'extérieur de la sphère} \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4R\pi\epsilon_0} \text{ si } R > \rho \Rightarrow \text{potentiel à l'intérieur de la sphère} \\ \frac{Q}{4\rho\pi\epsilon_0} \text{ si } R < \rho \Rightarrow \text{potentiel à l'extérieur de la sphère} \end{cases}$$

Le champ est le gradient négatif du potentiel, on emploie les dérivées des coordonnées cylindriques , on a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad_V} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Le potentiel est constant à l'intérieur de la sphère, donc le champs y est nul et il dépend de la distance au centre lorsque le point est à l'extérieur, valeur dont on cherche.

$$\vec{E} = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial \rho} \vec{u} = -\frac{\partial(\frac{Q}{4\rho\pi\epsilon_0})}{\partial \rho} \vec{u} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \rho^2} \vec{u}. \Rightarrow |E| = 3.6 \cdot 10^5 [V/m]$$

On remarque que les valeurs du champ et du potentiel pour la sphère sont identiques à celles que l'on a une distance d'un point d'une charge ponctuelle. La variable distance étant dans le cas de la sphère la distance au centre, c'est comme si la sphère équivalait à une charge ponctuelle placée en son centre, cette caractéristique physique permet une simplification intéressante dans les calculs.

(b) La force exercé par le champs en un point est le produit de l'intensité du champ par la charge de référence sur laquelle s'exerce la force. C'est aussi le produit de la masse de la charge de référence à son accélération. Connaissant la charge et la masse de l'élection, l'accélération reste l'inconnue de l'équation.

La direction de la force est évidemment radiale comme la remarque précédente nous l'a indiqué et comme on peut le déduire à l'instar de l'exemple du cours relatif au champs crée par un filament ; pour des raisons de symétrie, la somme des couples de projections en première coordonnée des vecteurs champs de même angle par rapport à l'axe entre le centre de la sphère et le point de référence s'annulant, vecteurs qui forment un cône dont la pointe est le point de référence et le cercle de base un cercle de distance r sur la surface de la sphère, seules les projections en secondes coordonnées ne s'annulent pas (celles parallèles à l'axe central).

$$q_e|E| = m.a \Rightarrow a = \frac{q_e|E|}{m} = 6.33 \cdot 10^{16} [m/s^2]$$

Lorsque l'électron est lâché, son énergie potentielle est transformée en énergie cinétique selon l'équation de la conservation de l'énergie. Le forttement est évidemment négligable et il n'y pas lieu de tenir compte d'effet d'induction puisque le déplacement de l'électron est dans la direction du champs, la force de Lorentz est nulle. Elle part d'une vitesse nulle et atteint la vitesse recherchée au point d'impacte. Les énegies potentielles aux deux points limites dépendront de la distance. Au point d'arrivée l'énergie potentielle n'est pas nulle. On pose l'équation :

$$E_{pot_P} + E_{cin_P} = E_{pot_S} + E_{cin_S} \Rightarrow q_e|E|\rho = q_e|E|(\rho - R) + \frac{1}{2}m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_e|E|R}{m}} = 1.95c$$

La réponse du manuel 0.97c est erronée, il suffit de changer 2 par 1/2 sous la fraction pour s'en convaincre.