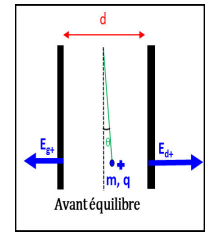
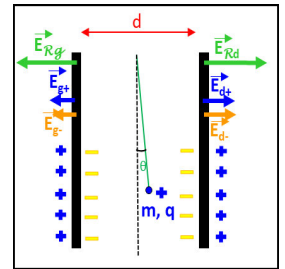


1.20 Une petite sphère de masse 0.2g pend par un fil entre deux plaques parallèles et verticales distantes de 5 cm. La charge portée par la sphère est de $6 \cdot 10^{-9}[C]$. Quelle est la différence de potentiel entre les plaques si le fil fait avec la verticale un angle de 10° ?

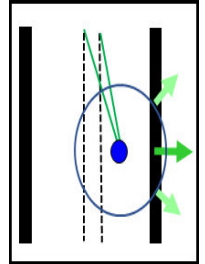


Solution *PROBLÈME NON ENCORE RÉSOLU, 20.-40.- à qui me donne une piste !*

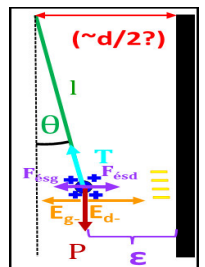
Cet exercice s'apparente à un problème nécessitant une réflexion théorique sur des présupposés empiriques. Ce dispositif révèle que l'on a une sphère de charge positive qui selon le principe fondamental d'induction électrostatique crée par influence sans contact des charges sur un autre matériau ¹. Les charges alors générées sur un matériau, en première instance supposé conducteur lors de la mise en place expérimentale, sont donc négatives sur les surfaces intérieures des deux plaques parallèles qui entourent la sphère dans deux plans verticaux et parallèles, donc par principe de conservation de la neutralité, positives sur les faces extérieures. En d'autre terme, le champ électrique créé par la charge positive en situation initiale, crée quasi instantanément des charges opposées sur les plaques, donnant également lieu à des champs électriques dont les sources génératrices se trouvent sur le conducteur. Rappel, la convention vectorielle pour le champ électrique est le suivant ; le vecteur part de la charge positive et se dirige vers la charge négative (à défaut nulle vers l'infini) .



Puisque la répartition des charges est théoriquement connue et la valeur de celle inductrice est donnée, les normes des champs et conséquemment des forces électrostatiques ne dépendent que d'une seule variable ; la distance entre la sphère et la surface de plaque. On présuppose, à moins de disposer de système électronique de positionnement, que les plaques n'ont pas été introduites exactement à égales distance de la sphère, faute de quoi les forces opposées à gauches et à droites de sens différents et de mêmes intensités s'annuleraient (charges et distances égales) et la sphère ne formerait pas d'angle avec la verticale. Elles ont été introduites du moins avec un très petit décalage créant une asymétrie, ici arbitrairement choisi du côté droit. A titre informatif, en posant pour longueur du fil proche de la distance entre les deux plaques, l'écart au bout du fil fait moins d'un centimètre (longueur du fil fois le sinus de 10°). En application de la loi statique de Newton, on a des forces électrostatiques exercées par les plaques sur la sphère qui dépendent de l'inverse au carré de la distance, donc la résultante de ces forces est orientée ici à droite, et cette résultante est équilibrée par le poids de la sphère et la tension du fil y exercée.



Remarque, l'intensité du champ en un point étant dépendant de l'inverse du carré de la distance de la cible, ici la référence étant une sphère que l'on peut assimiler à un point, à une importante distance de la charge source cette intensité est négligeable. Mais ici la cible étant l'ensemble des points de la plaque verticale, la distance entre la source et les points cibles variant peu avec l'inverse du cosinus de l'angle fait par rapport à l'horizontal, la distribution des charges négatives sur la plaque se fait donc sur une surface relativement importante. Toutefois cette information ne nous est pas utile, comme vu dans l'exemple du fil conducteur du cours et confirmé avec l'interprétation des résultats de l'exercice 1.19, les projections verticales des couples de vecteurs champ générés entre les charges



1. v. §8,26,68 Électricité. Monard , chap. 1.1, 1.12 Électricité et magnétisme Physique XXI Marc Séguin

négatives et la charge "ponctuelle" positive formant des angles égaux par rapport à l'axe horizontal de droite ligne entre la charge et les plaques s'annulent, s'additionnent seules les projections horizontales. Les deux champs résultants qui représentent la moyenne des champs et agissent ainsi sur la sphère sont de direction perpendiculaire aux plaques et passent pas le centre de la sphère. ¹

On choisit par convention d'orienter les vecteurs et les valeurs algébriques positivement vers la droite. Pour chaque plaque, les normes des champs générés par les charges positives et négatives sont considérées identiques : on néglige l'incrément de distance entre la sphère et les surfaces respectives intérieures et extérieures.

Pour résumer, connaissant les valeurs des charges portées par les plaques, par principe égales sur chaque face à celle de la sphère, on détermine l'intensité des champs résultants et des forces électrostatiques. En posant une distance relative, pour le côté droit, avec comme variable l'écart par rapport à la sphère, ici à droite, on a donc deux inconnues, la différence de potentiel recherchée et l'écartement relatif. L'équation statique des forces de Newton nous fournit une équation, celle de la différence de potentiel, la seconde équation. La différence de potentiel imposée par la charge de la sphère est directement donnée, en employant l'équation du potentiel et en calculant leur différence entre les deux plaques. Pour déterminer la différence de potentiel, on doit pouvoir extraire la variable écartement de l'équation de Newton et de l'introduire dans celle-ci.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \vec{F} = 0 = \vec{F}_{\text{ésg}} + \vec{F}_{\text{ésd}} + \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T \cdot \cos(\theta) - P = 0 \\ F_{\text{ésd}} - F_{\text{ésg}} - T \cdot \sin(\theta) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F_{\text{ésg}} - F_{\text{ésd}} - P \cdot \tan(\theta) = 0 \\ (1a > 1b) \Delta \vec{F}_{\text{és}} = q * \Delta \vec{E}_{\text{és}} = q * \left(\frac{2|\pm q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{2|\pm q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-\epsilon)^2} \right) \vec{i} \Rightarrow P \cdot \tan(\theta) = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{(d-\epsilon)^2} \right) \end{array} \right.$$

$$(2) \Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{d-\epsilon} \right)$$

Si les principes et équations posés sont justes, il reste à résoudre le problème mathématique suivant ; comment résoudre ce système d'équation, sachant que la première équation est un polynôme de degré 4, de la quelle il faut extraire et déterminer ainsi l'écartement qui permettrait de trouver la différence de potentiel en l'introduisant dans la seconde ? La première équation sous forme de polynôme de degré 4 est :

$$\alpha \epsilon^4 - 2d\alpha \epsilon^3 + \alpha d^2 \epsilon^2 + 2d\epsilon - d^2 = 0, \text{ avec } \alpha = \frac{P \tan(\theta) 4\pi\epsilon_0}{2q^2}$$

supprimons le coefficient du quatrième degré et recherchons les égalités avec le polynôme sous forme de produit de facteurs :

$$\epsilon^4 - 2d\epsilon^3 + d^2 \epsilon^2 + \frac{2d\epsilon}{\alpha} - \frac{d^2}{\alpha} = 0 \text{ équivalant à } (\epsilon - a) * (\epsilon - b) * (\epsilon - c) * (\epsilon - d) = 0$$

On s'attend à trouver deux solutions une à droite et une à gauche donnée par la différence entre la distance et l'écartement à droite. Donc, on a deux solutions double, on peut donc poser :

$$(\epsilon - a)^2 * (\epsilon - (d - a))^2 = 0 \text{ en recherchant l'égalité entre les termes de } \epsilon^0 \text{ on obtient :}$$

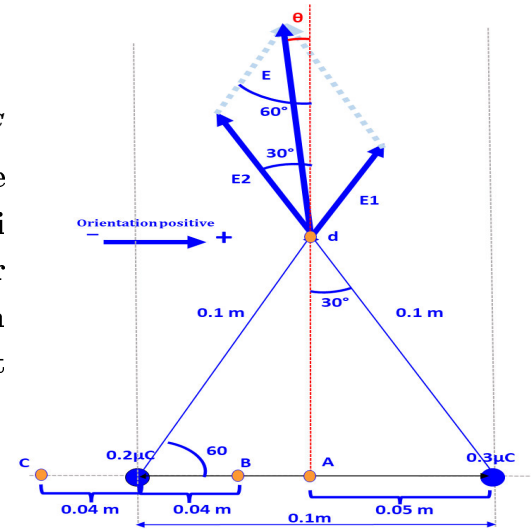
$$a^2 * (d - a)^2 = -\frac{d^2}{\alpha} \text{ ou } a * (d - a) = \frac{d}{\sqrt{\alpha}} \text{ en imposant que } \alpha \text{ soit négatif, vrai pour } \theta > 90^\circ \text{ donc :}$$

$$a^2 - ad + \frac{d}{\sqrt{\alpha}} = 0 \text{ ou en résolvant l'équation complexe } a^2 - ad + i * \frac{d}{\sqrt{\alpha}} = 0$$

Mystère

Rép à trouver : 2880 V

1.21 Deux charges ponctuelles positives de $2 \cdot 10^{-7} C$ et $3 \cdot 10^{-7} C$ se trouvent à une distance de 0.1 m. Calculer le champ et le potentiel électriques qu'elles créent (a) au milieu de l'axe qui les joints, (b) en un point situé à 0.04 m de la première sur cet axe et entre les deux charges, (c) en un point situé à 0.04m de la première sur cet axe, mais à l'extérieur, (d) en un point équidistant de 0.1m de chacune des charges.



Solution

Posons, E_1 pour le champ crée par la charge 1 et E_2 , la 2ème. Et convenons que les champs orientés à droites sont positifs.

(a) A mi-distance, le champs E_2 orienté à gauche est en norme plus grand que le champ E_1 orienté à droite. Donc la résultante des champs est selon la convention :

$$E = |E_1| - |E_2| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-7}}{(0.05)^2} - \frac{3 \cdot 10^{-7}}{(0.05)^2} \right) [N/C] = -3.6 \cdot 10^6 [N/C]$$

E orienté à gauche

Le potentiel est la somme de deux potentiels positifs :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-7}}{0.05} + \frac{3 \cdot 10^{-7}}{0.05} \right) [V] = 9 \cdot 10^4 [V]$$

(b) A 0.04 m de la première charge entre les 2, le champ E_2 est orienté à gauche, donc à nouveau par convention on lui donne un signe négatif, E_1 positif. Donc la résultante des champs est :

$$E = |E_1| - |E_2| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-7}}{(0.04)^2} - \frac{3 \cdot 10^{-7}}{(0.06)^2} \right) [N/C] = 3.75 \cdot 10^5 [N/C]$$

E est positif, il est orienté à droite.

Le potentiel est la somme de deux potentiels positifs :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-7}}{0.04} + \frac{3 \cdot 10^{-7}}{0.06} \right) [V] = 9 \cdot 10^4 [V]$$

(c) A 0.04 m de la première charge à l'extérieur, le champ E1 est orienté à gauche, comme le champs E2, donc à nouveau par convention E est négatif (- + -). Donc la résultante des champs est :

$$E = -|E1| - |E2| = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{(0.04)^2} + \frac{3.10^{-7}}{(0.14)^2} \right) [N/C] = -1.2627.10^6 [N/C]$$

E orienté à gauche

Le potentiel est la somme de deux potentiels positifs :

$$V = V1 + V2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.04} + \frac{3.10^{-7}}{0.14} \right) [V] = 6.428.10^4 [V]$$

(d) Comme les deux charges et le point où l'on recherche la valeur du champs sont à égales distances, les vecteur de champs E1 et E2 font un angle de 30° avec la verticale, leur supports faisant 60° avec l'horizontal (triangle équilatéral). Les deux champs étant inégaux en intensité la résultante des champs sera dévié d'un angle theta vers la gauche (E2 > E1). Pour déterminer le champ résultant, on emploie deux équations ; d'abord, le théorème du cosinus appliqué à $E = E1 + E2$, puis le théorème du sinus nous permet d'établir une autre équation entre par exemple E1, E et theta. Posons les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(60) \rightarrow E = 3.923.10^5 [N/C] \\ \frac{E}{\sin(120)} = \frac{E1}{\sin(30-\theta)} \Rightarrow E = \frac{\sin(120)E1}{\sin(30-\theta)} \rightarrow \sin(30-\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} * E1}{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(30-\theta) = 0.397 \Rightarrow$$

$$\theta = \arcsin(0.397) - 30 = -6.58$$

Le Champ E se dirige vers la gauche avec un angle à la verticale de 6.6°.

Le potentiel est la somme de deux potentiels positifs :

$$V = V1 + V2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.1} + \frac{3.10^{-7}}{0.1} \right) [V] = 4.5.10^4 [V]$$

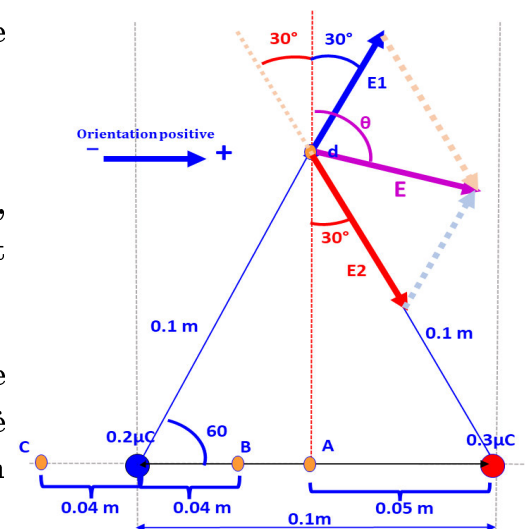
1.22 Résoudre l'exercice précédent dans le cas où la deuxième charge est négative.

Solution

Posons à nouveau, E1 pour le champ crée par la charge 1 et E2, la 2ème. Et convenons que les champs orientés à droites sont positifs.

(a) A mi-distance, le champs E1 est orienté à droite, la charge créant le champ E2 étant négative, E2 est également orienté à droite. Donc la résultante des champs est selon la convention positive et orientée à droite :

$$E = |E1| + |E2| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{(0.05)^2} + \frac{3.10^{-7}}{(0.05)^2} \right) [N/C] = +1.8.10^6 [N/C]$$



E orienté à droite

Le potentiel est la somme de deux potentiels :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.05} - \frac{3.10^{-7}}{0.05} \right) [V] = -1.8.10^4 [V]$$

(b) A 0.04 m de la première charge entre les 2, le champ E1 est orienté à droite, le champ E2 également , la charge la créant étant négative. donc à nouveau par convention , comme le champ E est orienté à droite, on lui donne un signe positif. Donc la résultante des champs est :

$$E = |E_1| + |E_2| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{(0.04)^2} + \frac{3.10^{-7}}{(0.06)^2} \right) [N/C] = 1.875.10^6 [N/C]$$

E orienté à droite

Le potentiel est la somme de deux potentiels :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.04} - \frac{3.10^{-7}}{0.06} \right) [V] = 0 [V]$$

(c) A 0.04 m de la première charge à l'extérieur, le champ E1 est orienté à gauche, E1 négatif par convention, le champs E2 est orienté vers la droite, donc la résultante des champs est :

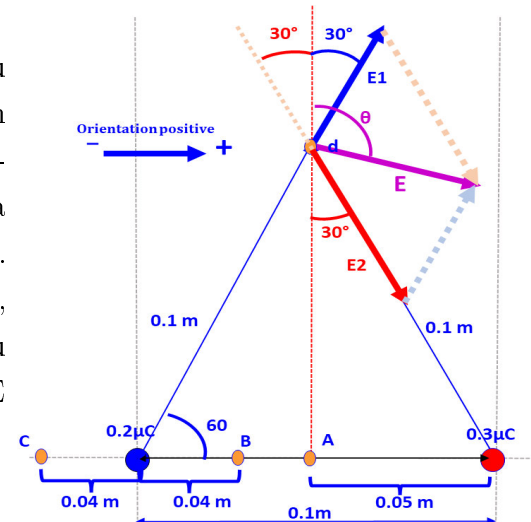
$$E = -|E_1| + |E_2| = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9.10^9 \left(-\frac{2.10^{-7}}{(0.04)^2} + \frac{3.10^{-7}}{(0.14)^2} \right) [N/C] = -0.987.10^6 [N/C]$$

E est donc orienté à gauche, en effet, le point de mesure étant très proche de E1, l'intensité du champ E1 l'emporte sur le champs E2, bien que ce dernier est dirigé dans l'autre sens.

Le potentiel est la somme de deux potentiels :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.04} - \frac{3.10^{-7}}{0.14} \right) [V] = 2.5715.10^4 [V]$$

(d) Comme les deux charges et le point où l'on recherche la valeur du champs sont à égales distances, les vecteur de champs E1 et E2 font un angle de 30° avec la verticale, leur supports faisant 60° avec l'horizontal (triangle équilatéral). Les deux champs étant inégaux en intensité la résultante des champs sera dévié d'un angle theta vers le bas (E2>E1). Pour déterminer le champ résultant, on emploie deux équations ; d'abord, le théorème du cosinus appliqué à E2 = -E1 + E , puis le théorème du sinus nous permet d'établir une autre équation entre par exemple E2, E et theta. Posons les équations :



$$\theta = \arcsin(0.982) + 30^\circ = 79.1^\circ + 30^\circ = 109.1^\circ \Rightarrow \theta - 90^\circ = 19.1^\circ$$

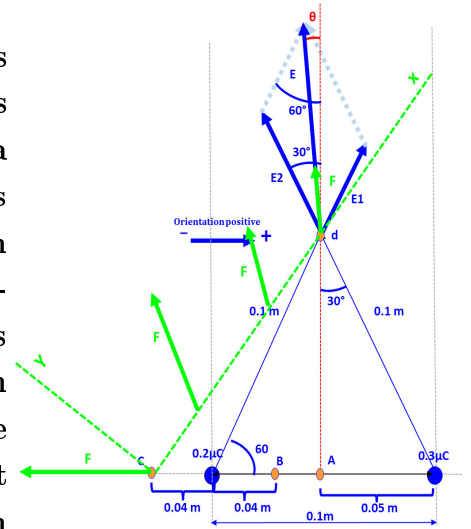
Le Champ E se dirige vers le bas avec un angle de 19.1° par rapport à l'horizontal.

Le potentiel est la somme de deux potentiels :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9.10^9 \left(\frac{2.10^{-7}}{0.1} - \frac{3.10^{-7}}{0.1} \right) [V] = -9.10^3 [V]$$

1.23 Toujours dans l'hypothèse de l'exercice 1.21 calculer le travail nécessaire pour déplacer une charge de $4 \times 10^{-7} \text{ Cb}$ du point défini en (c) au point défini en (d). Est-il nécessaire de spécifier le chemin spécifique ?

Solution Si on place une charge positive à proximité de ces points et que l'on la relâche, on se trouve dans une situation où des forces de répulsion entraînent la charge en mouvement, donc on a une transformation d'énergie potentiel en énergie cinétique. Dans notre situation, le système n'est pas abandonné à lui même, on déplace la charge et on peut considérer que la vitesse de déplacement est constante, et la variation de vitesse nulle, d'ailleurs cette énergie est négligeable par rapport à l'énergie potentielle en chaque point du parcours. Donc le travail produit ne dépend que des forces électriques conservatives sur le chemin à parcourir et caractérise la variation d'énergies potentielles. Le potentiel en un point est l'énergie potentielle d'une unité de charge, l'énergie potentielle étant donc l'énergie positionnelle de la charge placée en un point du champ, produit du potentiel du point par la charge.

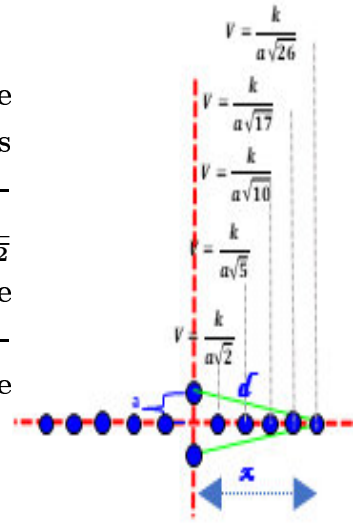


Ecrivons les équations : La seconde équation a l'avantage de donner directement la valeur du travail, puisque le champs et la force dépendent de la position, il faudrait autrement les exprimer en fonction de la position, donc également le différentiel de chemin en fonction des distances relatives , ce qui rendrait la résolution difficile.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{c \rightarrow d} = \int_c^d \overrightarrow{F1_{(c,d)}} . \overrightarrow{dr} = q \int_c^d \overrightarrow{E} . \overrightarrow{dr} = q \int_c^d (\overrightarrow{E1} + \overrightarrow{E2}) . \overrightarrow{dr} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 x^2} \int_c^d \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + d^2 + xd} \right) dx ... \\ W_{c \rightarrow d} = E_{pot_c} - E_{pot_d} = q(V_c - V_d) \end{array} \right.$$

$$W_{c \rightarrow d} = E_{pot_c} - E_{pot_d} = q(V_c - V_d) = 4.10^{-7}(6.428.10^4 - 4.510^4)[J] = 7.7210^{-3}[J]$$

1.24 Deux charges ponctuelles positives de valeur q sont fixées sur l'axe des Y aux ordonnées $y = +a$ et $y = -a$. (a) Porter sur un graphique les positions des deux charges. (b) Quel est le potentiel à l'origine ? (c) Montrer que le potentiel en tout point de l'axe des X est : $V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$ (d) Construire le graphique du potentiel sur l'axe des X en fonction de x dans l'intervalle $[+5a, -5a]$. (e) Pour quelle valeur de x le potentiel a-t-il une valeur moitié de celle à l'origine ? (f) Calculer à partir de (c) le champ électrique sur l'axe des X.



Solution

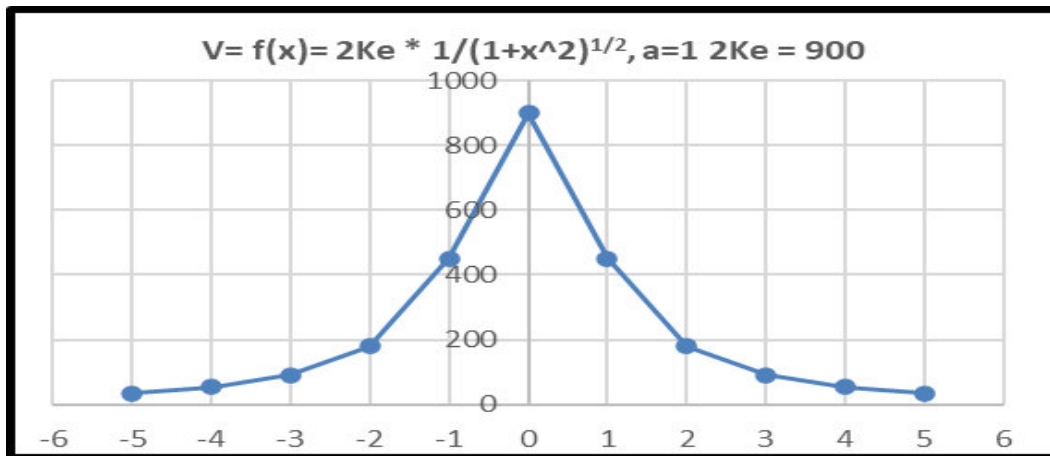
(b) Le potentiel est la somme de deux potentiels au point 0 :

$$V_0 = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad 2K_e \frac{q}{a}$$

(c) Le potentiel est la somme de deux potentiels au point 0 :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} = 2K_e \frac{q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(d) Graphique du potentiel, avec $2 K_e q = 900$ a = 1



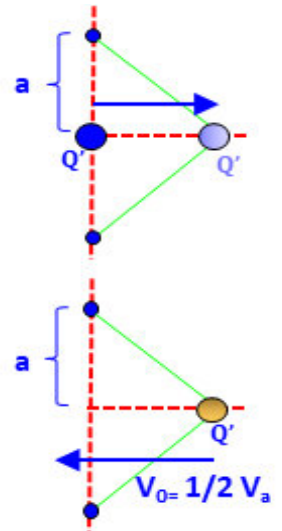
(e) Posons l'équation d'égalité et mettons en évidence $X(1/2)$

$$V_{1/2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x_{1/2}^2}} = \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow 2a = \sqrt{a^2 + x_{1/2}^2} \Rightarrow x_{1/2} = \sqrt{3}a$$

(f) Le champ électrique est donné par le gradient du potentiel, ici dans une seule direction, sur l'axe a

$$\xi = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial (2qK_e (a^2 + x^2)^{-1/2})}{\partial x} = qK_e (a^2 + x^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{2qxK_e}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Ex. 1.25 Supposons que, dans la configuration des charges de l'exercice 1.24, l'on déplace très légèrement une charge q' de masse m primitivement à l'origine dans la direction de l'axe des X puis on l'abandonne. (A) quelle est sa vitesse à l'infini? (B) Construire le graphique donnant la vitesse de la particule en fonction de X. (C) Si la particule est projeté vers la gauche le long de l'axe des X depuis un point situé à grande distance vers la droite, avec une vitesse moitié de celle trouvée en (A), à quelle distance de l'origine aura-t-elle une vitesse nulle? (D) Si une charge négative initialement au repos était lâchée sur l'axe des X à une très grande distance à gauche de l'origine, quelle serait sa vitesse lorsqu'elle passerait à l'origine?



Solution

(A) La particule passant de l'origine à l'infini vers les x positifs, a d'abord une vitesse nulle au départ et une énergie potentielle que l'on peut calculer comme dans l'exercice 1.23. A l'infini l'énergie potentielle est nulle comme la distance tends vers l'infini. On emploie ici le principe de la conservation d'énergie mécanique, comme aucune force non conservative n'intervient on peut écrire;

$$E_{m0} = E_{m\infty} \Rightarrow E_{pot0} + E_{cin0} = E_{pot\infty} + E_{cin\infty} \Rightarrow q(V_{-a} + V_a) + 0 = 0 + E_{cin\infty} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$q' \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} = 2K_e \frac{q'q}{a} = \frac{1}{2}mv^2_{\infty} \Rightarrow v^2_{\infty} = \frac{4qq'K_e}{ma} \Rightarrow v_{\infty} = 2\sqrt{\frac{qq'K_e}{ma}}$$

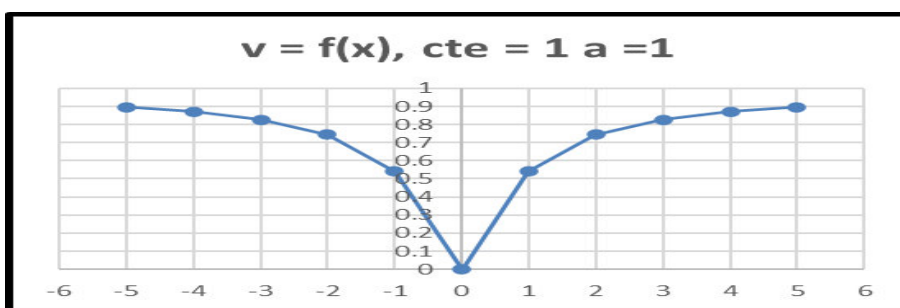
(B) On emploie à nouveau le principe de la conservation d'énergie mécanique, l'énergie mécanique 2 est ici la somme de l'énergie cinétique et potentielle en un point quelconque :

$$E_{m0} = E_{mx} \Rightarrow E_{pot0} + E_{cin0} = E_{potx} + E_{cinx} \Rightarrow q(V_{-a} + V_a) + 0 = q(V_x + V_x) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2K_e \frac{q'q}{a} - 2K_e \frac{q'q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow v^2 = \frac{4qq'K_e}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4qq'K_e}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)}$$

$$\text{on a bien } \lim_{x \rightarrow \infty} v = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4qq'K_e}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)} = 2\sqrt{\frac{qq'K_e}{ma}} = v_{\infty}$$

(B) Graphique de v en fonction de x , (pour simplification on a posé $a = 1$ et l'ensemble des termes constants = 1, $\rightarrow v_{\infty} = 1$)



(C) La position du départ du mouvement est donnée à une grande distance à droite, posons en première approximation qu'à grande distance l'énergie potentielle est nulle, celle-ci étant inversement proportionnelle à la distance, on peut considérer cette hypothèse comme valable. A l'arrivée, la vitesse de la charge est nulle, on pose à nouveau l'équation de conservation d'énergie simplifiée ;

$$E_{m\infty} = E_{md} \Rightarrow E_{pot\infty} + E_{cin\infty} = E_{potd} + E_{cind} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}.E_{cin\infty} = q'(V_d + V_d) + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.m\left(\frac{1}{2}.\left(2\sqrt{\frac{qq'K_e}{ma}}\right)\right)^2 = K_e q'q\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = 4a \iff a^2 + x^2 = 16a^2 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{15}a$$

En effet le résultat mathématique ne nous permet pas de dire si le point d'arrêt est sur les valeurs négatives ou positives de x. Cependant, on peut s'appuyer sur le raisonnement des forces en jeux. Supposons que la particule est positive, lorsqu'elle arrive à droite de l'axe des y, elle subit une seule force dans le sens positif de x, force générée par les deux charges et qui participe à l'arrêt de la particule ; on néglige le frottement de la particule, nous avons considéré qu'il n'y ait de forces non conservatives , donc aucune accélération négative due à une force de frottement. A l'inverse si elle dépasse l'origine, elle subit une force dirigée vers la gauche, donc elle est poussée à poursuivre sa route, à moins qu'elle ait encore une accélération négative au-delà du point zéro. Donc dans ce cadre d'hypothèse, la particule s'arrête nécessairement à gauche de l'origine :

$$x = +\sqrt{15}a$$

(D) On peut poser à nouveau l'équation de la conservation de l'énergie mécanique. On obtient le même résultat que dans A.

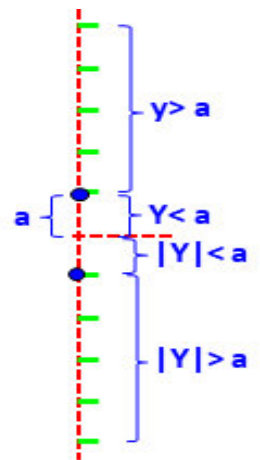
$$E_{m\infty} = E_{m0} \Rightarrow E_{pot\infty} + E_{cin\infty} = E_{pot0} + E_{cin0} \Rightarrow 0 + 0 = E_{cin0} + q'(V_0 + V_0) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - q'2K_e\frac{q}{a} = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{4qq'K_e}{ma} \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{\frac{qq'K_e}{ma}}$$

Ex. 1.26 (a) Revenant toujours au système de charges décrit dans l'exercice 1.24, faire un graphique du potentiel le long de l'axe des Y, de y= 5a à y = - 5a (b) Comparer au graphique 1.24(d). Le potentiel est-il minimum à l'origine.

Solution

(A) Le potentiel est la somme de deux potentiels au point Pi. Pour les points situés au dessus de x, on des distances relatives de |y-a| et |y+a|, en dessous de x, |a-y| et |a+y|, qui sont respectivement les mêmes valeurs, donc les 2 graphes seront symétriques par rapport à Y. Les potentiels aux points a sont infinis, car la distance entre le point de mesure et une des charges est toujours nulle, écrivons les deux équations :

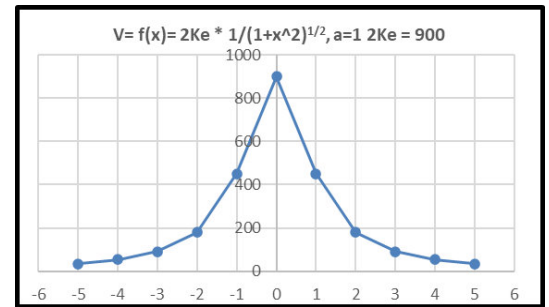
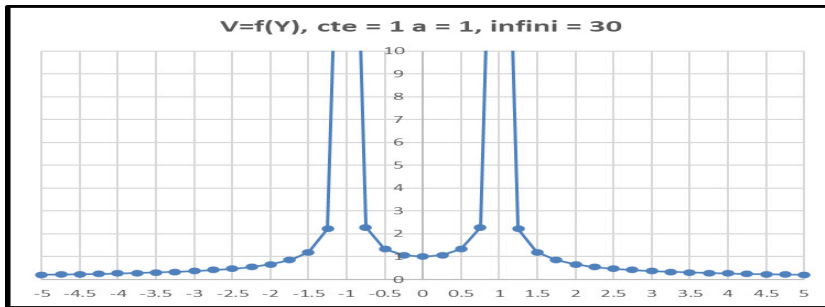


$$V_{P+} = V_{P1} + V_{P2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|y-a|} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0|y+a|} \left\{ \begin{array}{l} (1) P_{y>a} \quad |y-a|=y-a \quad \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2y}{y^2-a^2} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{4qK_e y}{y^2-a^2} \\ (2) P_{y<a} \quad |y-a|=y+a \quad \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a}{a^2-y^2} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{4qK_e a}{a^2-y^2} \end{array} \right.$$

$$(3) V_0 = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad 2K_e \frac{q}{a}$$

$$V_{P-} = V_{P1} + V_{P2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|a-y|} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0|a+y|} \left\{ \begin{array}{l} (4) P_{|y|<a} \quad |a+y|=a+y \quad \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a}{a^2-y^2} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{4qK_e a}{a^2-y^2} \\ (5) P_{|y|>a} \quad |a+y|=-a-y \quad \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2y}{a^2-y^2} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{-4qK_e y}{y^2-a^2} \end{array} \right.$$

Posons pour le produit des constantes et a la valeur de 1, le graphique est alors le suivant :

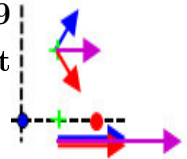


(B) Par rapport au graphique 1.24d, ici on a une discontinuité en $y = \pm a$, correspondant aux potentiels infinis et entre -a et +a, un minimum local au centre en 0.

(C) Le potentiel présente un minimum au centre, mais la valeur minimal est bien évidemment aux points très éloignés, il s'approche de 0. Si l'on compare le potentiel au centre et au point par ex. 5a, on a .

$$V_{P5} \stackrel{(1)}{=} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot 5a}{(5a)^2 - a^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{10}{24a} = \frac{10}{24} \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} = 0.42 \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} < \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \stackrel{(3)}{=} V_{P0}$$

Ex. 1.27 Dans un système de coordonnées cartésiennes une charge de $25 \cdot 10^{-9}$ Cb est placée à l'origine des axes et une charge de $-25 \cdot 10^{-9}$ Cb au point (6m,0). Quel est le champs électrique en (a) (3m,0) ? (b) (3,4) ?



Solution

(A) Au point central entre les deux charges, le champ crée par la charge de gauche est orienté vers la droite, celui crée par la charge de gauche également vers la droite puisque la charge le générant est négatif, donc par convention de positivité à droite, le champ resultant est la somme des deux positifs ;

$$E = |E_1| + |E_2| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{25 \cdot 10^{-9}}{3^2} + \frac{25 \cdot 10^{-9}}{3^2} \right) [N/C] = +50 [N/C]$$

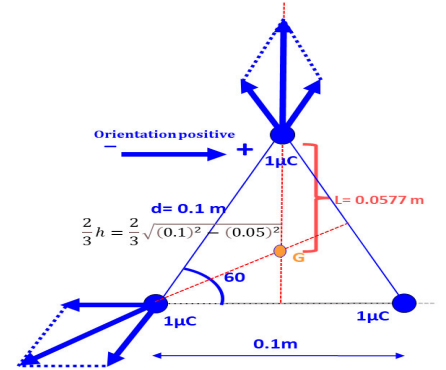
(A) Le champ crée par la charge de gauche est orienté NE, celui crée par la charge de gauche SE, comme il y a une symétrie par rapport à l'axe $y=4$, le champ resultant E devrait être orienté vers la droite avec un angle nul par rapport à l'horizontal. Vérifions numériquement cette hypothèse :

$$|E_1| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9.10^9 \left(\frac{25.10^{-9}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) = 9 \left[\frac{N}{C} \right] \quad \alpha = \arctan \frac{4}{3} = 53.13^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) E_1 x = |E_1| \cos(\alpha) = 5.4 \left[\frac{N}{C} \right] \\ (2) E_1 y = |E_1| \sin(\alpha) = 7.2 \left[\frac{N}{C} \right] \end{array} \right.$$

$$|E_2| = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 9.10^9 \left(\frac{25.10^{-9}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) = 9 \left[\frac{N}{C} \right] \quad \beta = \arctan \frac{4}{-3} = -53.13^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) E_2 x = |E_2| \cos(\beta) = 5.4 \left[\frac{N}{C} \right] \\ (2) E_2 y = |E_2| \sin(\beta) = -7.2 \left[\frac{N}{C} \right] \end{array} \right.$$

$$E_x = E_1 x + E_2 x = +10.8 \left[\frac{N}{C} \right] \quad E_y = E_1 y + E_2 y = 0 \left[\frac{N}{C} \right] \quad \text{donc orienté à droite à l'horizontal}$$

Ex. 1.28 Des charges électriques égales , de 1 microcoulomb chacune, sont placés au sommet d'un triangle équilatéral de 10 cm de côté. Calculer (A) la force et l'énergie potentielle résultants pour chaque charge de l'interaction avec les autres, (B) le champ et le potentiel électrique résultant au centre du triangle, (C) l'énergie potentielle interne du système.



Solution

(A) Les 3 charges étant égales et toutes positives. Chacune est influencée par les 2 autres, la force et le champ appliqués sont les sommes vectorielles des deux forces et champs générées par ces deux charges. En raison de la symétrie et des angles constants de 60 degrés formés par ces vecteurs, les directions et les intensités des vecteurs résultants peuvent être déduites ; Ces vecteurs forment un angle de 120 degrés entre eux dont un est à la verticale, leur intensité sont la somme des cosinus de 30 degrés des vecteurs champs et forces générateurs. Par ailleurs les distances d'application sont également identiques. Posons les équations ;

$$\overrightarrow{F_{12-3}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 2(|F| \cos(30^\circ)) \overrightarrow{j} = 2 \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 d^2} \overrightarrow{j} = 1.559 \overrightarrow{j} [N]$$

$$E_{pot_{12-3}} = F_1 d + F_2 d = 2. \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = 0.18 [J]$$

(B) Les 3 vecteurs champs de même intensité forment des angles de 120 degrés, leur somme est donc nulle. Pour le potentiel au centre, il faut d'abord calculer la distance des coins au centre, en raison de symétrie , le potentiel total égale 3 fois le potentiel par rapport à chaque charge :

$$E_G = 0 \quad L = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \sqrt{0.1^2 + 0.05^2} = 0.0577 [m] \quad V_G = 3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} = 4.67.10^5 [V]$$

(C) Chaque charge exerce sur la charge voisine une force identique à une distante identique, dans la position voisine il existe une énergie potentielle également identique générée par cette charge. Comme le système possède 3 charges, il y a donc en tout 3 énergies potentielles générées par les paires de charges respectives. L'énergie potentielle interne du système est alors la somme des ces trois :

$$E_{pot-sys} = 3. \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = 0.27 [J]$$