

Monard mécanique- Exercices chapitre 11

(v. Rappel sur le frottement Ex 11.1 , Généralité sur véhicule roulant Ex 11.10)

Ex 11.1 Un objet de masse m repose sur un plan d'inclinaison α variable. Le coefficient de frottement statique est μ_0 . Calculer la valeur maximale de α qui laisse l'équilibre possible.

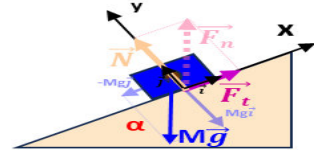
Rappel sur le frottement de contact (sec).

Le vecteur force de frott. statique F_t peut être représenté comme la composante tangentielle du vecteur force de soutien F_n du sol exercée sur l'objet. ($F_n = f(Mg)$). Cette représentation découle de la loi des additions vectorielles applicable aux forces et empiriquement vérifiée, donc aux lois fondamentales de Newton : la 2ème $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ et la 3ème loi ("l. des opposées") $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

La résultante des forces, " $m\vec{a}$ ", est dans cette situatio, statique, nulle. Une loi du frottement statique a été établi et expérimentalement confirmée, $F_{fr} \leq \mu_{gl} F_n$, indiquant que le frottement statique a une valeur maximale.

En tirant horizontalement et progressivement sur un objet avec un dynamomètre mesurant l'intensité d'une force proportionnelle à la distance d'élongation ou écart ($F=kd$), on mesure invariablement une force croissante jusqu'au point de glissement. Il tombe sous le sens que l'existence de cette force se justifie dans diverses situations statiques, p. ex sur un plan incliné s'opposant à l'effet de la gravité.

Elle dépend de la nature des surfaces en contact et interfilms existants, de la force de soutien exercée sur l'objet concerné et diminue avec l'inclinaison du support (Newt., dépendant donc de N). Elle est donc formalisée comme une variable, en norme, allant de 0, - si des composantes de forces opposées au frottement sont nulles (objet immobile sur plan horizontal), à un maximum. La formule répond au cas où $F_n=0$ (ex angle droit), $F_t \min = 0$. F_t a un maximum égal au produit du coefficient de frottement statique (facteur de proportionnalité) μ_0 et de F_n $F_{fr} = \mu_{gl} F_n$. Ces faits expliquent la forme en inéquation tirée de la loi du frottement. Au-delà de la limite de la situation statique, la loi de glissement s'applique et le frottement de glissement (-cinétique, -dynamique) est indifféremment proportionnel à F_n ($F_{gl} = \mu_{gl} F_n$).

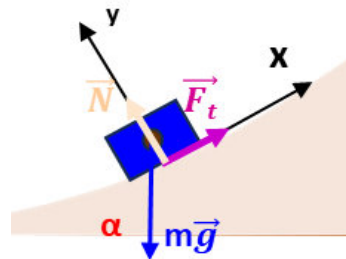


Posons la 2ème éq. de Newt. avec le référentiel centré sur l'objet & orienté selon l'inclinaison et l'inéquation de la loi du frottement statique. Des projections des forces en x et de l'éq. du frott. on tire la valeur de l'angle maximale.

$$\vec{Mg} + \vec{F}_t + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow -Mg \sin(\alpha) + F_t = 0 \xrightarrow{F_t \leq \mu_0 F_n} -Mg \sin(\alpha) = -F_t \leq -\mu_0 F_n = -\mu_0 Mg \cos(\alpha) \Rightarrow Mg \sin(\alpha) \leq \mu_0 Mg \cos(\alpha) \Rightarrow \tan(\alpha) \leq \mu_0 \Rightarrow \underline{\alpha \leq \arctan(\mu_0)}$$

Ex 11.2 Une pièce de bois repose sur un plan métallique dont la pente augmente progressivement. Le coefficient de frottement statique vaut 0.60. Le coefficient de glissement vaut 0.42. Calculer l'accélération de la pièce de bois au moment où le glissement se produit.

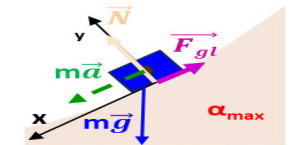
On recherche l'accélération à la limite de l'angle pour lequel on passe justement d'une situation statique à un glissement. L'équation du frottement statique nous donne la valeur limite de la force de frottement qui est alors maximale et constante que l'on introduit dans la seconde éq. "statique" (résultante nulle) de Newton afin d'obtenir cet angle limite. Donc dans l' "éq. dynamique" de Newton (résultante non nulle) , il ne reste comme inconnue que la valeur de l'accélération. Posons l'équation statique de Newton de du frottement statique, afin de déterminer ce angle que l'on introduit dans l' "éq. dynamique" :



$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ limite statique : } F_t = \mu_0 F_n = \mu_0 Mg \cos(\alpha_{max}) \\ \vec{Mg} + \vec{F}_t + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow -Mg \sin(\alpha_{max}) + F_t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Mg \sin(\alpha_{max}) = \mu_0 Mg \cos(\alpha_{max}) \Rightarrow \mu_0 = \tan(\alpha_{max}) \Rightarrow \alpha_{max} = \arctan(\mu_0) \end{array} \right.$$

$$(2) \vec{F}_{gl} + \vec{N} + \vec{Mg} = \vec{Ma} \Rightarrow \mu_{gl} Mg \cos(\alpha_{max}) - Mg \sin(\alpha_{max}) - Ma = 0 \Rightarrow a = g \cos(\alpha) (\mu_{gl} - \tan(\alpha)) \Rightarrow$$

$$\underline{a = g \cos(\arctan(\mu_0)) (\mu_{gl} - \tan(\arctan(\mu_0))) = -1.51 [m/s^2]}$$



Ex 11.3 Un pâtissier dépose des gâteaux dans un four au moyen d'une palette. Le coefficient de frottement statique des objets sur la palette est de 0.6. Quelle accélération faut-il donner à la palette, dans son mouvement de retour, pour que les gâteaux restent dans le four ?

Deux forces s'opposent au lieu contact de gâteau, la force de frottement F_t et la force de traction exercée par le pâtissier. Tant que celle-ci est plus faible que la valeur maximale de la force de frottement statique, le gâteau accompagne la palette. On pose l' "éq. statique" de Newton dans laquelle la F_t a sa valeur limite maximale et l'on tire a de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{limite statique : } F_t = \mu_0 F_n = \mu_0 Mg \\ \vec{Ma} + \vec{F}_t = \vec{0} \Rightarrow -Ma + \mu_0 Mg = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = \mu_0 g = 5.88 [m/s^2]}$$

Ex 11.4 Une gomme est sur un livre posé à plat sur une table. On donne au livre divers mouvements horizontaux. Le coeff. stat. de la gomme sur le livre vaut 1. Quelle accélération le livre peut-il avoir sans que la gomme glisse.

Le problème est exactement similaire au précédent, ici on cherche la limite de l'accélération afin de rester dans la limite de la situation statique, on pose l'éq. statique de Newton avec cette limite posée par la force de frottement statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{limite statique : } F_t \leq \mu_0 F_n = \mu_0 Mg \\ \vec{M}\vec{a} + \vec{F}_t = \vec{0} \Rightarrow -Ma + F_t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ma = F_t \leq \mu_0 Mg \Rightarrow a \leq \mu_0 g \Rightarrow \underline{a \leq g}$$

Ex 11.5 Un objet est lancé à une vitesse v sur un plan horizontal. Le contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement μ . Calculer la distance de freinage.

On peut procéder de deux manières au moins dans la résolution de l'exercice. La force de frottement de glissement dépend du poids de l'objet et elle est constante, elle entraîne une réduction de la vitesse de l'objet jusqu'à l'arrêt de celui-ci. On peut alors appliquer la théorie de la variation de l'énergie cinétique, celle-ci est ici égale au travail effectué sur la longueur du trajet par la force de frottement. On peut par ailleurs poser l'équation dynamique de Newton et par intégration déterminer la vitesse initiale. Ce deux méthodes devraient donner le même résultat.

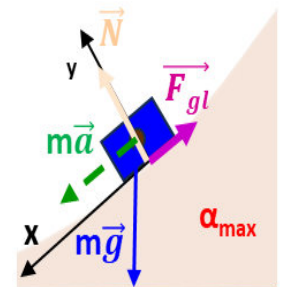
$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2} = \int \vec{-F}_t d\vec{r} = -\mu_{gl}mgx]_0^d = -\mu_{gl}mgd \Rightarrow d = \frac{v_1^2}{2g\mu_{gl}}$$

$$\vec{M}\vec{a} + \vec{F}_t = \vec{0} \Rightarrow ma - F_t = ma - \mu_{gl}mg \Rightarrow a = g\mu_{gl} \Rightarrow \int \Rightarrow v \stackrel{(1)}{=} g\mu_{gl}t + \vec{v}_0^0 \Rightarrow \int \Rightarrow$$

$$d \stackrel{(2)}{=} \frac{g\mu_{gl}}{2}t^2 + \vec{v}_0^0 t + \vec{x}_0^0 \Rightarrow d \stackrel{(1) \geq (2)}{=} \frac{g\mu_{gl}}{2} \left(\frac{v}{g\mu_{gl}} \right)^2 \Rightarrow d = \frac{v_1^2}{2g\mu_{gl}}$$

Ex 11.6 Un solide de masse m glisse sur un plan d'inclinaison α . Le coefficient de glissement est μ_{gl} . Le solide part de l'état d'immobilité. Quelle vitesse a-t-elle après un parcours de longueur d ? Application numérique : $m = 5\text{kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0.25$, $d = 30\text{ cm}$.

On peut procéder au moins de deux manières comme dans l'exercice précédent dans la résolution de cet exercice. Le poids de l'objet entraîne celui-ci vers la bas et la force de frottement s'y oppose; on a deux forces (la composante normale de la force de réaction du sol étant perpendiculaire à la surface) qui exercent un travail le long du chemin et la résultante entraîne ici une augmentation de la vitesse de l'objet, immobile à l'origine du temps. On peut alors appliquer la théorie de la variation de l'énergie cinétique, celle-ci est ici égale au travail effectué par les deux forces sur la longueur du trajet. On peut par ailleurs poser l' "équation dynamique" de Newton et par intégration déterminer la vitesse finale selon la variable d définie. Ces deux méthodes devraient donner le même résultat.



$$(1) \quad \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} = \int \left(\vec{F}_t + \vec{m}\vec{g} + \vec{N} \right) d\vec{r} = \left(mg \sin(\alpha) - \mu_{gl}mg \cos(\alpha) \right) d \Rightarrow$$

$$(1) \quad v_2 = \left| \pm \sqrt{2d \left(g \sin(\alpha) - \mu_{gl}g \cos(\alpha) \right)} \right|$$

$$(2) \quad \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_t + \vec{N} = \vec{m}\vec{a} \Rightarrow a = g \sin(\alpha) - \mu_{gl}g \cos(\alpha) \Rightarrow \int \Rightarrow v \stackrel{(1)}{=} g \sin(\alpha)t - \mu_{gl}g \cos(\alpha)t + \vec{v}_0^0$$

$$\Rightarrow \int \Rightarrow d \stackrel{(2)}{=} \frac{g \sin(\alpha)}{2} t^2 - \frac{\mu_{gl} g \cos(\alpha)}{2} t^2 + \stackrel{=0}{v_0} t + \stackrel{=0}{x_0} \Rightarrow$$

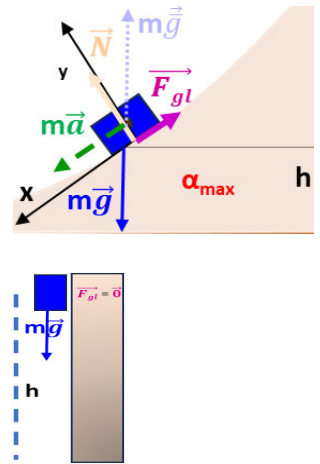
$$d \stackrel{(1) \geq (2)}{=} \frac{1}{2} (g \sin(\alpha) - \mu_{gl} g \cos(\alpha)) \frac{v_2^2}{(g \sin(\alpha) - \mu_{gl} g \cos(\alpha))^2} \Rightarrow v_2 = \left| \pm \sqrt{2d(g \sin(\alpha) - \mu_{gl} g \cos(\alpha))} \right|$$

$$v_2 = \sqrt{2gd(\sin(\alpha) - \mu_{gl} \cos(\alpha))} = \sqrt{0.6 * 10(\sin(30) - 0.25 \cos(30))} = 1.3[m/s]$$

Rem. : 1/ La vit. négative, càd orientée vers le haut n'est pas une option réaliste dans cette situation, elle correspondrait à une inversion des forces, dont l'antigravitation en serait à l'origine. 2/ La vitesse est indépendante de la masse de l'objet, mais uniquement dépendante de la gravitation, de l'inclinaison et de la distance de parcours qui est dépendante du temps. Un objet en chute libre abandonné à la gravitation (sans force de frottement de contact) acquiert une vitesse, qui varie en fonction de la hauteur de chute donc du temps de parcours. Dans le cas où l'angle est de 90°, on retrouve bien ce résultat attendu de la vitesse en chute libre établie à partir de la loi de la conservation de l'énergie mécanique :

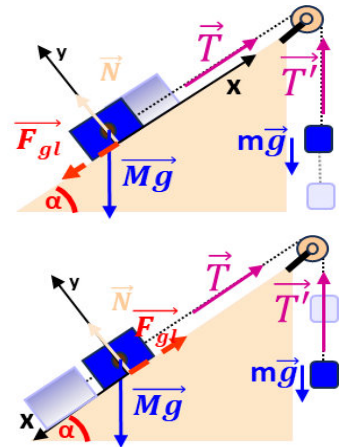
$$E1 = E2 \Rightarrow mgh + 0 = \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \text{ On a bien :}$$

$$v_2 = \sqrt{2gd(\sin(90) - \mu_{gl} \cos(90))} \stackrel{d=h/\sin(\alpha)}{=} \sqrt{2 \frac{h}{\sin(90)} g} = \sqrt{2gh}$$



Ex 11.7 Un objet de masse M se trouve sur un plan incliné d'un angle α . Le coefficient de frottement μ_0 est insuffisant pour le maintenir en équilibre. Un fil parallèle aux lignes de plus grande pente est attaché à l'objet. Au plus haut du plan incliné, il passe sur une poulie et soutient un contrepoids de masse m suspendu en l'air. Déterminer les limites entre lesquels m peut varier sans que l'équilibre se rompe.

Un coefficient faible caractérise dans la circonstance du problème une Ffr max insuffisante à l'état "statique", (v. introduction ex11.1)). On part d'une situation "statique" où l'objet n'est pas encore sur le point de glisser ; la norme de Ffr est inférieure à sa valeur maximale. Les normes des tension (T) exercées par le fil sur les masses sont identiques, (on néglige la masse du fil). L'éq. de Newton posée nous permet de déterminer T. Même en un second temps où les 2 masses solidaires développent une vitesse commune, $T_1 = T'_1$, ($a_1 = dv_1/dt = dv_2/dt = a_2$), sauf si l'on impose par ex. une traction supplémentaire. On doit considérer 2 cas selon les valeurs des masses ; l'ensemble des 2 masses peut autant se déplacer vers le bas, à droite que sur le flan gauche, et poser une double équations où les sens des forces de frottement sont opposés. Ici, on a choisi 2 référentiels opposés en x centrés à l'origine de N. On vérifie la validité du résultat obtenu par les valeurs limites.



$$\left\{ \begin{array}{l} Ft \leq \mu_0 F_n = \mu_0 Mg \cos(\alpha) \\ \vec{T} + \vec{Mg} + \vec{F}_t + \vec{m}\vec{g} = \vec{0} \\ \vec{T}' + \vec{m}\vec{g} = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O(\mathcal{R}1)_\alpha \quad -Mg \sin(\alpha) - F_t + T = 0 \\ O(\mathcal{R}2)_{-\alpha} \quad Mg \sin(\alpha) - T - F_t = 0 \\ mg = T = T' \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} O(\mathcal{R}1)_\alpha \quad -Mg \sin(\alpha) + mg = F_t \leq \mu_0 Mg \cos(\alpha) \\ O(\mathcal{R}2)_{-\alpha} \quad Mg \sin(\alpha) - mg = F_t \leq \mu_0 Mg \cos(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \leq M(\sin(\alpha) + \mu_0 \cos(\alpha)) \\ M(\sin(\alpha) - \mu_0 \cos(\alpha)) \leq m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

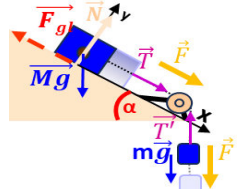
$$M(\sin(\alpha) - \mu_0 \cos(\alpha)) \leq m \leq M(\sin(\alpha) + \mu_0 \cos(\alpha))$$

On obtient pour des pentes nulle et à angle droit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0) - \mu_0 M \leq m \leq M\mu_0 \checkmark 0 \leq m, \text{ et le produit des 2 membres de droite par } g \rightarrow \text{relation entre } T \text{ et } F_t \text{ à } 0^\circ \\ (90) M \leq m \leq M \Rightarrow M = m \checkmark \text{ cela correspond bien à une situation stationnaire ou mouvement à } v=\text{cte} \end{array} \right.$$

Ex 11.8 Un objet de masse M glisse sur un plan d'inclinaison α . Il est tiré vers le bas par un fil parallèle aux lignes de pente du plan. Au bas du plan, ce fil passe sur une poulie et retient un corps de masse m suspendue en l'air. Le coefficient de frottement de l'objet sur le plan est μ_0 . Déterminez la traction du fil et l'accélération des objets lorsqu'ils descendent et sont accélérés vers le bas.

Considérons d'abord l'équilibre "statique". En 1ère instance au point limite de glissement, on peut poser l'éq. "statique" de Newt. et déterminer la tension du fil (v. précéd./ 11.1). La force de frottement est alors maximale et constante et étant donné que les deux masses sont solidaires et développent la vitesse commune, accélération et tensions seront conservées en situation "dynamique". On peut alors déterminer l'accélération à partir des éq. "dynamiques" en fonction des autres paramètres connus .



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{limite de glissement } Ft = \mu_0 F_n = \mu_0 Mg \cos(\alpha) \\ \vec{T} + \vec{Mg} + \vec{F}_t + \vec{N} = \vec{0} \text{ sit. d'équil. stat. } \Rightarrow T = | -Mg \sin(\alpha) + \mu_0 Mg \cos(\alpha) | \\ \vec{F} = \vec{T} + \vec{Mg} + \vec{F}_{gl} \Rightarrow Ma = T + Mg \sin(\alpha) - F_{gl} \text{ sit. d'équil. dynam. = stat. (} T=T') \\ \vec{F} = \vec{T}' + \vec{mg} \Rightarrow ma = mg - T' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(m + M)a = mg + Mg \sin(\alpha) - \mu_0 Mg \cos(\alpha) \Rightarrow a = g \frac{(m + M(\sin(\alpha) - \mu_0 \cos(\alpha)))}{M + m}$$

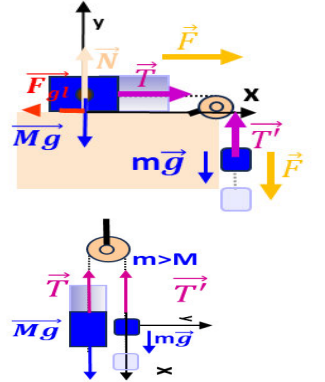
On vérifie la validité de l'équation par les valeurs obtenues pour un angle 0 et de - 90 deg. ; $(\alpha = 0) a = g \frac{m - \mu_0 M}{m + M}$ $F_t =$

$$0 \Rightarrow a = \frac{mg}{M + m} \quad m - \mu_0 M = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

✓ Si la force de frottement est nulle à angle plat, l'accélération a un sens (vers le bas) et elle est inférieure à la gravitation, ce qui peut se comprendre du fait de l'action inertielle de M, donc l'absence (M=0), nous renvoie à la chute d'un objet m d'accélération $a = g$. Et en posant pour $m = 0$, a est négative ou nulle. Nulle compte tenu du fait que l'on considère qu'il n'y a pas de force de frottement et $-\mu g = g \frac{F_t}{N} = g \tan(\alpha) = 0$. a s'annule pour le numérateur = 0 , c'ad que la force du poids de la petite masse est équilibré par la force de frott., ce qui correspond à 1 situation stationnaire ($v=0$ ou cte).

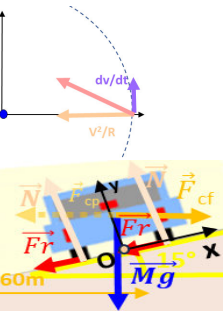
$(\alpha = -90) \quad a = g \frac{m - M}{m + M}$ la diff. de masse entraîne une accélération de sens variable.

✓ Lorsque ΔM est en faveur de m , celle-ci coulisse vers le bas et vice versa. En annulant alternativement chaque masse, on a bien selon le même référentiel une accélération égale à la gravitation et de signe concordant avec le sens fixe par celui-ci.



Ex 11.9 Une route a un rayon de courbure de 60 m. Le bord extérieur est relevé de sorte que la route a une inclinaison de 15 degrés dans le sens transversal. La ligne médiane de la route est un cercle dans un plan horizontal. On admet que les pneus des voitures ont un coefficient de frottement statique de 0.5. Quelle est la vitesse maximale à laquelle une voiture peut rouler sans dérapage ?

On se retrouve ici dans un contexte de mouvement circulaire accéléré jusqu'à ce que l'on atteigne une vitesse limite (VL) que pour le besoin du problème on prendra VL de dérapage. L'évolution de la norme tangentielle de l'accélération (dv/dt) dépend de la force (F) de propulsion générée par le moteur. Ne connaissant pas les vit. instantanées, cette accélération, ne peut être calculée, sauf si elle est const. (éq de Newton **). Le dérapage longitudinal est envisageable seulement s'il y a variation de la vitesse longitudinale , il dépend donc de l'accélération ($Ma_z = F_{fmax} = \mu_0 N$) et non de la norme de v. Donc celui-là ne répond pas au problème posé. On considère ici l'accélération radiale (dépendant de $|v|$). Dans le référentiel de la voiture *, la F centrifuge s'oppose à la F de frottement dans la limite de dérapage latéral. Posons l'éq. de N., on néglige diverses F (roulem., fluides, etc.) et pour simplification justifiée on représente certaines F en 1 seule (symétrie). A la VL, dans le plan radial et selon ($O_{xy}, \theta = 15^\circ$) :



$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{R})_{\text{non gal.}} * \quad \vec{F}_{cf} + \vec{Mg} + \vec{F}_{fmax} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \\ (\mathcal{X}) - Mg \sin(15^\circ) - \mu_0 N + Ma \cos(15^\circ) = 0 \\ (\mathcal{Y}) - Mg \cos(15^\circ) - Ma \sin(15^\circ) + N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \frac{v^2}{R} \cos(15^\circ) = Mg \sin(15^\circ) + \mu_0 N \\ N = Mg \cos(15^\circ) + M \frac{v^2}{R} \sin(15^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$M \frac{v^2}{R} (\cos(15^\circ) - \mu_0 \sin(15^\circ)) = Mg (\sin(15^\circ) + \mu_0 \cos(15^\circ)) \Rightarrow v = \sqrt{Rg \frac{(\sin(15^\circ) + \mu_0 \cos(15^\circ))}{(\cos(15^\circ) - \mu_0 \sin(15^\circ))}}$$

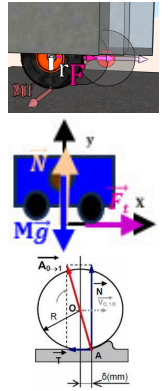
$v = 23[m/s] = 83[km/h]$ * En l'absence du frottement des pneus , le véhicule dérive vers l'extérieur, justifiant le sens centripète de F_r , v. Ch.

13. Il aurait été plus judicieux de représenter la force réelle centripète dans le référentiel central, et de formuler l'éq. : $\vec{Ma} = \vec{F}_{cp} = \vec{Mg} + \vec{F}_{fmax} + \vec{N}$, on a choisi ici de considérer le système selon le référentiel tournant avec la voiture. ** On peut évaluer a_t à la limite du dérapage longitudinal : $\vec{F}_{fmax} + \vec{Mg} + \vec{N} = \vec{Ma} \Rightarrow (O_{YZ}) Ma_t = Ft_{0=gl} = \mu_0 Mg \cos(15^\circ) \Rightarrow a_t = 3.15[m/s^2] < 8.5[m/s^2] = \cos(15^\circ) \frac{v^2}{R} = a_n$ La voiture dérape à une accélération plus faible en mouvement longitudinal ($a(z)$) que radial projetée ($a(x)$) et d'autant moins par rapport à une radiale non projetée.

Ex 11.10 Une voiture de masse m roule à une vitesse v sur une route droite. Les pneus ont un coefficient de frottement statique μ_0 . Quelle est la distance minimale sur laquelle la voiture peut s'arrêter sans déraper ? On envisagera les cas suivants : a) La route est horizontale. b) La route a une inclinaison alpha et la voiture monte. c) La route a une inclinaison alpha et la voiture descend.

Généralité sur la force de frottement (Ffr) statique, cinétique et de roulement d'un véhicule roulant :

Une voiture avance (situation d'accélération) lorsque sa force motrice entraîne les roues dans le sens horaire et se tracte en avant grâce au frottement au sol, sans lequel elle demeurerait sur place. La Ffr devrait nécessairement avoir alors le sens de la traction. Pour comprendre le phénomène et justifier des forces en jeu dans ce référentiel, représentons nous la rotation des roues au démarrage sans contact avec le sol ; un point de la roue se déplace en arrière sur un cercle avec une vitesse initiale nulle, ce point est accéléré. En contact avec le sol, le mouvement équivaut à celui de la route qui glisserait en arrière en entraînant la roue dont le centre reste immobile. Cette force fictive liée au mouvement de la route et dirigée vers l'arrière ne peut être qu'opposée à celle réelle liée à l'avancement. Donc dans le référentiel relatif au sol, la force de frottement peut être assimilée à une force de traction dans le sens du mouvement que l'on peut se représenter comme une infinité de basculements inertiels avant en pivot sur un point de contact de roues fixes. La force motrice peut être inférieure ou supérieure à la force de frottement (traction), dans le premier cas elle est insuffisante à mettre le véhicule en mouvement, dans le second il y a un dérapage et le frottement est alors cinétique. La force de frottement de roulement est une force liée à la déformation de la roue sur la surface de contact (Rér. à la dénomination roulement, dans la "bande de roulement" du pneumatique). Du fait de la déformation de la partie radiale extrême de la roue, une force oblique de réaction du sol et orientée vers l'arrière est générée et s'exerce sur cette partie, le composant tangentiel de cette force est la force de frottement de roulement. Cette force est responsable de la résistance à l'avancement variable d'un objet roulant en fonction de sa dureté, mais dépend aussi de la dureté du support de contact. Les roues d'un train sur voie ferrées sont extrêmement dures, leur coefficient de frottement est de l'ordre de 0.001, si on pouvait expérimentalement supprimer toute autre cause de frottement (matière en Bore-Aluminium-Magnésium de coefficient de frottement de 0.01, tunnel sous vide...), la résistance diminuerait au point que le véhicule pourrait avancer des kilomètres sous une seule impulsion.



a) La voiture a une accélération nulle avant le freinage ($v = v_0$). Afin de l'arrêter, le/la conducteur/trice peut soit lâcher l'accélérateur (frein moteur ou de roulement/frottement), soit freiner activement, ce qui se traduit par une force imposée sur la voiture, on emploie la seconde équation "dynamique" de Newt.. Par ailleurs, comme on aimerait connaître la distance minimale de freinage sans dérapage, la réduction de la vitesse doit être maximale sur une même durée de temps, donc l'accélération négative ("décélération") maximale, pourvu que la voiture ne glisse pas, c'est-à-dire que la force de frottement statique égale au plus au produit du coefficient et de la réaction du sol (loi du frott. sans glissement), comme le formalise l'inéquation obtenue et dont on prend la valeur maximale.

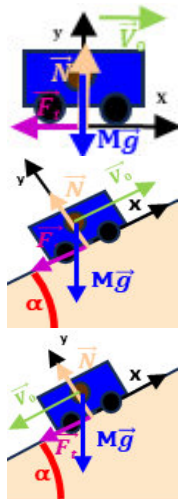
$$\vec{M}\vec{a} = \vec{F}t_0 + \vec{M}\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow M\vec{a} = -\vec{F}t_0 \leq -\mu_0\vec{N} \Rightarrow a \geq -\frac{\mu_0 N}{M} \Rightarrow a_{max} = -\frac{\mu_0 N}{M}$$

Afin de déterminer la distance de freinage, on intègre deux fois l'équation et on trouve les équations de l'horaire du véhicule et de sa vitesse, en éliminant la variable temps et en posant la condition d'horaire initiale nul (référentiel au début du freinage) et d'horaire de vitesse finale nulle, on obtient la distance minimale recherchée :

$$\int_{t_0}^t a_{max}(t) dt = \int_{t_0}^t -\frac{\mu_0 N}{M} dt \Rightarrow v(t) = -\frac{\mu_0 N}{M} t + k \stackrel{v(0)=k}{=} -\frac{\mu_0 N}{M} t + v_0 \Rightarrow (1) t = \frac{-(v(t) - v_0)M}{\mu_0 N}$$

$$\int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t -\frac{\mu_0 N}{M} t dt + \int_{t_0}^t v_0 dt \Rightarrow (2) r(t) = -\frac{\mu_0 N t^2}{2M} + v_0 t + r_0 \stackrel{r_0=0}{\Rightarrow} (1) > (2)$$

$$d_{min} = -\frac{\mu_0 N}{2M} \frac{((v_0 - v(t))^2 M^2)}{(\mu_0 N)^2} + v_0 \left(\frac{(v_0 - v(t))M}{\mu_0 N} \right) \stackrel{v(t_{fin})=0}{\Rightarrow} d = \frac{1}{\mu_0 N} \left(\frac{M v_0^2}{2} \right) \stackrel{N=Mg}{=} \frac{v_0^2}{2\mu_0 g}$$



Remarques et vérification du résultat : La distance minimale varie directement avec l'énergie cinétique initiale et inversement avec la force de frottement. La distance est inversement proportionnelle au facteur $\frac{\mu_0 N}{M}$ qui est la norme maximale de l'accélération. Une valeur plus petite de a entraîne bien une distance plus grande. L'annulation du frottement (coefficient nul), rend la distance infinie, ce qui correspond également au résultat théorique attendu.

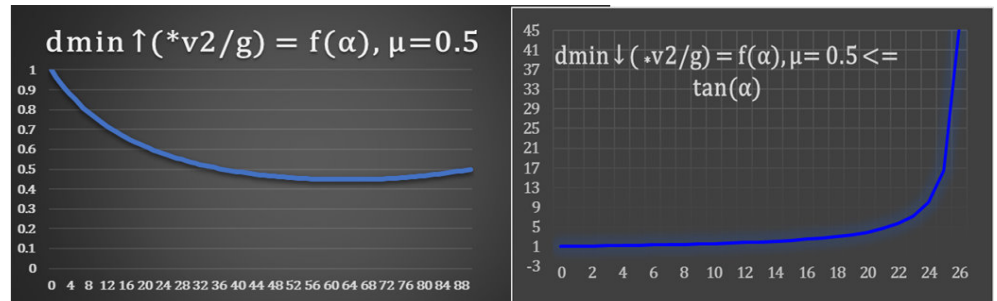
b) c) Le raisonnement fait en a) (l'accélération négative a la valeur maximale pour la distance d'arrêt minimale) s'applique dans ces deux cas également et la même équation "dynamique" est appliquée dans les 2 situations. Pour un angle donné non nul α , en montée, la voiture est freinée par la force de frottement et dans ce cas entraînée en arrière par son poids, on s'attend à ce que la distance minimale d'arrêt soit la plus petite des 2 conditions puisque par ailleurs la norme de la force de frottement pour le même angle est la même dans les deux cas. Pour le même α donné, la voiture est entraînée par son poids en avant en cas de descente, on s'attend à ce que la distance minimale soit la plus importante des 2 conditions. Dans les deux cas, on s'attend bien évidemment aussi que la distance varie également avec l'inclinaison. On a choisi d'orienter l'angle d'inclinaison positivement dans le sens horaire pour les deux situations. On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Ma} &= \overrightarrow{Ft_0} + \overrightarrow{Mg} + \overrightarrow{N} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (b) Ma = -Ft_0 - Mg \sin(\alpha) \Rightarrow a \geq -\frac{\mu_0 N}{M} - g \sin(\alpha) \xrightarrow{N=Mg \cos(\alpha)} \\ (c) Ma = Ft_0 - Mg \sin(\alpha) \Rightarrow a \leq \frac{\mu_0 N}{M} - g \sin(\alpha) \xrightarrow{N=Mg \cos(\alpha)} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} (b) a_{max} = -g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \Rightarrow v(t) = -g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))t + v_0 \xrightarrow{v(t_{fin})=0} \\ (c) a_{max} = g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \Rightarrow v(t) = g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))t + v_0 \xrightarrow{v(t_{fin})=0} \end{array} \right\} |dv_{max}| \Rightarrow t_{min} \\ \left\{ \begin{array}{l} (b) t_{min} = \frac{v_0}{g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \quad r_{max}(t) \stackrel{r_0=0}{=} (-g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha)))\frac{t^2}{2} + v_0 t \\ (c) t_{min} = \frac{-v_0}{g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))} \quad r_{max}(t) \stackrel{r_0=0}{=} (g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha)))\frac{t^2}{2} + v_0 t \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} (b) d = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} + \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \Rightarrow d_{montée} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \\ (c) d = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))} - \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))} \Rightarrow d_{descente} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin(\alpha) - \mu_0 \cos(\alpha))} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_m \stackrel{\alpha=0}{=} \frac{v_0^2}{2\mu_0 g} \quad d_d \stackrel{\alpha=0}{=} -\frac{v_0^2}{2\mu_0 g} \\ d_m \stackrel{\alpha=90^\circ}{=} \frac{v_0^2}{2g} \quad d_d \stackrel{\alpha=90^\circ}{=} \frac{v_0^2}{2g} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarques et vérification du résultat : Pour une pente nulle, on retrouve bien l'équation en a) dans les deux cas, résultat correspondant à la situation de freinage à l'horizontal. (La distance est négative dans le second cas, x orienté dans le sens opposé à v). On a comme attendu une distance minimale plus courte en montée qu'en descente, puisqu'on a une somme des termes du dénominateur dans la première équation et une différence des mêmes termes dans la seconde. Pour un angle droit, on retrouve l'équation de la vitesse en chute libre, il n'y a évidemment plus de frottement puisque la force de réaction du sol est nulle, on sort du cadre du problème. Le résultat obtenu pour la descente est ambigu. Quelque soit la vitesse initiale, dans une condition de chute à angle droit sans frottement, on ne peut pas évoquer une distance minimale. On peut dire qu'au delà de cette valeur, on serait dans une situation virtuelle de glissement. Compte tenu de la chute la distance varierait de celle obtenue à l'infini. La distance ne peut être infinie que lorsque le dénominateur est nulle. Pour l'équation de la descente, on doit donc poser une condition limite au-delà de laquelle on sort du contexte du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} (b) d_{montée} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_0 \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \\ (c) d_{descente} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin(\alpha) - \mu_0 \cos(\alpha))} \\ \text{avec } \mu_0 \leq \tan \alpha \end{array} \right.$$

Représentons un graphique de la distance minimale en fonction de l'angle d'inclinaison.

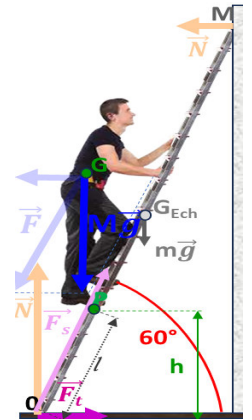


Pour un coefficient de 0.5, en descente, la distance minimale d'arrêt s'allonge comme attendu et ceci jusqu'à 27 degrés d'angle, au-delà les valeurs obtenues sont négatives. En montée, la distance diminue aussi comme attendue, mais à 63 degrés, elle augmente très légèrement. La distance étant la même à 39 et 88 degrés..... ??

Ex 11.11. Une échelle a une longueur de 4 m et une masse de 20 kg. Elle est appuyée contre un mur avec une inclinaison de 60°. Le coefficient de frottement du pied de l'échelle sur le sol est de 0.3. Au contact du mur, on admet que le frottement est négligeable. Un homme de 80 kg peut grimper sur l'échelle. Jusqu'où peut-il aller sans qu'il y ait glissement ? Quel est l'inclinaison minim. de l'échelle qui lui permettrait d'arriver jusqu'en haut ?

A/ Dans cet exercice des forces (F.) s'exercent à distance de deux points de pivot, au sol et au mur. On recherche l'état d'équilibre statique de ces F. à la limite de glissement. On peut appliquer l'équation statique des moments (Mt) autour de ces points de pivot O ou M. Les F. appliquées sur l'échelle peuvent être décomposées vectoriellement en composantes verticales et horizontales. Considérons en 1er les Mt autour du point de pivot M. Posons d= distance MP relative à M sur l'échelle à la limite du glissement et L la longueur de l'échelle et orientons les Mt dans le sens horaire.

$$\begin{aligned} \text{A1/ } \vec{Mg} \otimes \vec{MG} + \vec{mg} \otimes \vec{MG_e} + \vec{F_s} \otimes \vec{MO} &= \vec{Mg} \otimes \vec{MG} + \vec{mg} \otimes \vec{MG_e} + \vec{F_t} \otimes \vec{MO} + \vec{N} \otimes \vec{MO} = \vec{0} \Rightarrow \\ -Mgd \cos 60 - \frac{L}{2}mg \cos 60 - F_t L \sin 60 + NL \cos 60 &\stackrel{\text{limite gliss.}}{=} 0 \\ -Mgd \cos 60 - \frac{L}{2}mg \cos 60 - \mu NL \sin 60 + NL \cos 60 &\stackrel{N=(M+m)g}{=} 0 \\ Mdg \cos 60 + \frac{L}{2}mg \cos 60 + (M+m)gL(\mu \sin 60 - 1 \cos 60) &= 0 \Rightarrow \\ d = -\frac{mL}{2M} + \frac{M+m}{M}L(1 - \mu \tan 60) &= 1.902[m] \Rightarrow \\ OP = l = L - d = 2.1[m] \Rightarrow \text{en hauteur } h = l \sin(60) &= 1.82[m] \end{aligned}$$



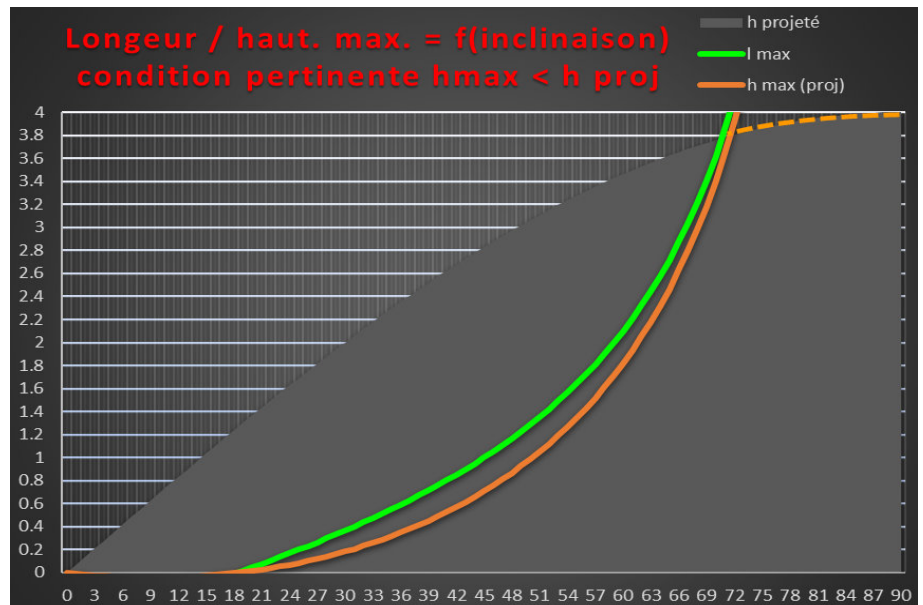
A2/ On établit l'équation équivalente avec pour centre des moments le point O

$$\begin{aligned} \vec{Mg} \otimes \vec{OG} + \vec{mg} \otimes \vec{OG_e} + \vec{OM} \otimes \vec{N_m} &= \vec{0} \quad N_m = Ft \text{ limite gliss.} = \mu N = \mu(M+m)g \Rightarrow \\ Mgl \cos 60 + \frac{L}{2}mg \cos 60 - N_m L \sin 60 &= Mgl \cos 60 + \frac{L}{2}mg \cos 60 - (m+M)g\mu L \sin 60 = 0 \\ l = -\frac{mL}{2M} + \frac{m+M}{M}\mu L \tan 60 &= 2.1[m] \Rightarrow \text{en hauteur } h = l \sin(60) = 1.82[m], \text{ résultat attendu.} \end{aligned}$$

B/ Ces mêmes équations nous permettent de déterminer l'inclinaison minimum permettant d'arriver jusqu'en haut, en posant pour distance PM = d = 0. On obtient alors :

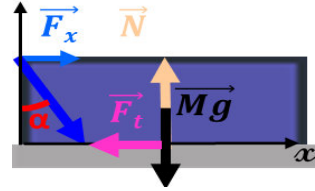
$$\frac{M+m}{M}L(1 - \mu \tan \alpha) = \frac{mL}{2M} \Rightarrow 1 - \mu \tan \alpha = \frac{m}{2(M+m)} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2M+m}{2\mu(M+m)} \Rightarrow \alpha = 71.56^\circ$$

On peut représenter graphiquement la longueur ou hauteur (h.) maximale sans glissement en fonction de l'inclinaison de l'échelle. Les valeurs limites pertinentes sont celles pour lesquelles h.max est plus petite que la h. projetée de l'échelle, du moins théoriquement. On a bien une valeur limite de 72° pour laquelle la hauteur projetée correspond à la hauteur maximale au bout de l'échelle. Toutefois cela ne signifie pas qu'à des angles supérieurs l'équation n'est plus valable. On peut simplement interpréter qu'au-delà de cet angle, on dépasse la limite de la h. max, c-à-d qu'on peut invariablement monter jusqu'à la h max. sans glissement. Pour une correspondance avec la réalité physique, la courbe h max devrait prolonger la hauteur projetée, comme montré sur la figure.



Ex 11.12. Un objet de masse m est posé sur une table horizontale. le coefficient de frottement statique est μ_0 . On exerce sur l'objet une force F faisant un angle α avec la verticale, de manière à le presser contre la table, et en même temps à le faire glisser. Quelle doit être la grandeur de la force F pour que le glissement se produise ? La réponse trouvée a-t-elle un sens pour toute valeur de α ? Application numérique : $m = 2.5 \text{ kg}$, $\mu_0 = 0.34$, $\alpha = 15 \text{ degrés}$ (puis 20 et 70 degrés).

Posons l'équation "statique" de Newton avec la condition limite pour laquelle la force de frottement est proportionnelle au support du sol. En effet, à la condition limite, la somme des forces appliquées sur l'objet est nulle. La force de frottement est seule opposée à la composante horizontale de la force appliquée ; on a alors :



$$\vec{F} + \vec{Ft}_0 + \vec{Mg} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow F \sin(\alpha) - Ft \stackrel{Ft=\text{lim. glissement } \mu N = \mu Mg}{\Rightarrow}$$

$$F = \frac{\mu Mg}{\sin(\alpha)} = \frac{0.34 \cdot 2.5 \cdot 9.8}{\sin(15)} = 32.18[N]$$

$$F_{15} = 32.18[N] \quad F_{20} = 24.35[N] \quad F_{70} = 8.86[N]$$

On constate que plus l'angle formé entre la direction de la force et la verticale est petit, plus la force à exercer pour parvenir au point de glissement est importante. Ce qui est tout à fait logique, plus on s'approche de la verticale, plus la composante verticale de la force est importante et celle-ci est "perdue" en force de pression sur la table et à contrario lorsque l'angle devient grand, la force suffisante au glissement devient faible, à angle droit la force égale sa composante horizontale. Le graphique de cette corrélation montre qu'aux valeurs extrêmes de l'angle la force à fournir est très importante et qu'aux valeurs centrales, autour de l'angle droit, en application horizontale, cette valeur reste stationnaire.

