

Monard mécanique- Exercices relatifs aux chapitres 3 ; La vitesse

Ex 3.1 Un mobile a l'horaire suivant : $\vec{r} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t^3$

$$\text{où : } \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 & [ms^{-2}] \\ 1 & [ms^{-2}] \\ 0 & [ms^{-2}] \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & [ms^{-3}] \\ 0 & [ms^{-3}] \\ -2 & [ms^{-3}] \end{pmatrix}$$

Calculer la vitesse à l'heure $t = 1s$ de deux manière : a) En utilisant comme points auxiliaires les points où se trouve le mobile aux heures 1.0 s et 1.1 s. b) En dérivant

a) On identifie les points proximaux en $t=1.1s$ et $t=1s$, puis on calcule une approximation de la vitesse, par le rapport de la distance entre ces deux points et l'intervalle de temps de 0.1 s. On peut également faire de même dans l'intervalle de $[0.95;1.05]$, ce qui semble plus pertinent pour avoir une vitesse moyenne autour de la valeur $t=1s$.

$$\text{où : } \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0[m] \\ 1[m] \\ -2[m] \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{1.1} = \begin{pmatrix} -1(1.1)^2 + 1.1^3 = 0.121[m] \\ 1.1^2 = 1.21[m] \\ -2(1.1)^3 = -2.662[m] \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \frac{1}{0.1} \begin{pmatrix} 0.121 - 0 \\ 1.21 - 1 \\ -2.662 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1.21[ms^{-1}] \\ 2.1[ms^{-1}] \\ -6.62[ms^{-1}] \end{pmatrix} \quad \vec{v}(0.95 - 1.05) = \frac{1}{0.1} \begin{pmatrix} 0.055 - (0.045)[ms^{-1}] \\ 1.1 - 0.9[ms^{-1}] \\ -2.3 - (-1.7)[ms^{-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1[ms^{-1}] \\ 2[ms^{-1}] \\ -6[ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

b) Par dérivation on obtient :

$$\vec{v} = 2\vec{A}t + 3\vec{B}t^2 \stackrel{t=1}{=} 2\vec{A} + 3\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 & [ms^{-1}] \\ 2 & [ms^{-1}] \\ 0 & [ms^{-1}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & [ms^{-1}] \\ 0 & [ms^{-1}] \\ -6 & [ms^{-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1[ms^{-1}] \\ 2[ms^{-1}] \\ -6[ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

Le résultat autour de la valeur centrale dans l'intervalle $[0.95;1.05]$ est plus proche de la vitesse "réelle" (dérivation).

Ex 3.2 Un mobile a l'horaire suivant : $\vec{r} = \vec{A} + \vec{B}t + \vec{C}t^2$

$$\text{où : } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & [m] \\ 10 & [m] \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} -8 & [ms^{-1}] \\ -24 & [ms^{-1}] \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 & [ms^{-2}] \\ 1 & [ms^{-2}] \end{pmatrix}$$

Déterminer la vitesse en $t = 4s$: a) En faisant deux approximations successives. b) En dérivant

a) On procède comme dans l'exercice précédent . On prend deux intervalles de temps de rayons de 0.1 s et 0.01 s et comparons les résultat obtenus.

$$\vec{r}_{3.95} = \begin{pmatrix} -8 * 3.95 + 2 * 3.95^2[m] \\ 10 - 24 * 3.95 + 3.95^2[m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.395[m] \\ -69.1975[m] \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{4.05} = \begin{pmatrix} -8 * 4.05 + 2 * 4.05^2 = 0.405[m] \\ 10 - 24 * 4.05 + 4.05^2 = -70.79[m] \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \frac{1}{0.1} \begin{pmatrix} 0.405 + 0.395 \\ -70.79 + 69.1975 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 8[ms^{-1}] \\ -16[ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{3.99} = \begin{pmatrix} -8 * 3.99 + 2 * 3.99^2[m] \\ 10 - 24 * 3.99 + 3.99^2[m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0798[m] \\ -69.8399[m] \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{4.01} = \begin{pmatrix} -8 * 4.01 + 2 * 4.01^2 = 0.0802[m] \\ 10 - 24 * 4.01 + 4.01^2 = -70.1599[m] \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \frac{1}{0.1} \begin{pmatrix} 0.405 + 0.395 \\ -70.79 + 69.1975 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 8[ms^{-1}] \\ -16[ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

b) Dans ce cas, la vit. moyenne autour d'un intervalle de 0.1s est déjà égale à la valeur "vraie", obtenue par dérivation :

$$\vec{v} = \vec{B} + 2\vec{C}t = \begin{pmatrix} -8 + 4 * 4[ms^{-1}] \\ -24 + 2 * 4[ms^{-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8[ms^{-1}] \\ -16[ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

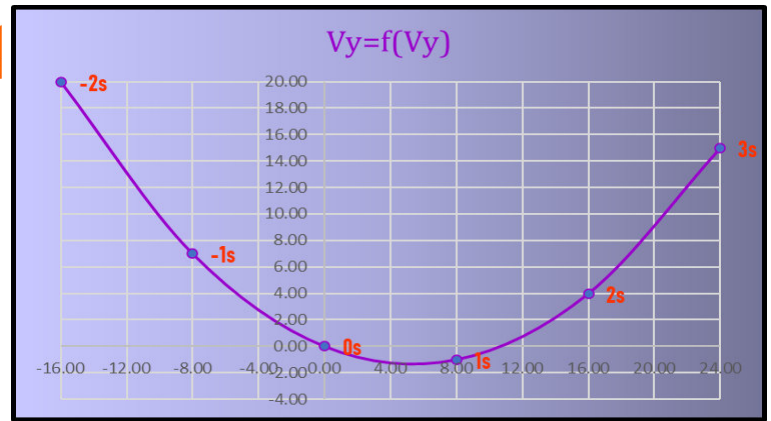
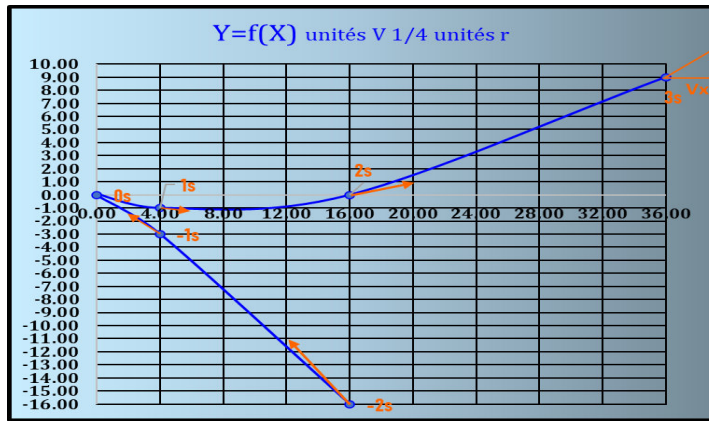
Ex 3.3 Dans un référentiel orthonormé Ox, Oy, un mobile a l'horaire

$$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 \quad \text{où } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & [ms^{-3}] \\ 1 & [ms^{-3}] \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 & [ms^{-2}] \\ -2 & [ms^{-2}] \end{pmatrix}$$

a) Calculer la position et la vitesse du mobile, de seconde en seconde, de la date -2s à 3s et faire une représentation graphique. b) Où et quand la vitesse est-elle parallèle à l'axe Ox ?

a) Comme précédemment, on calcule les horaires de la position et de la vitesse en fonction du temps dans un tableur et on crée un graphique des deux, $y=f(x)$ et $V_y=f(V_x)$.

$t_1(s)$	-2	-1	0	1	2	3
$x(m)$	16	4	0	4	16	36
$y(m)$	-16	-3	0	-1	0	9
$V_x(m/s)$	-16	-8	0	8	16	24
$V_y(m/s)$	20	7	0	-1	4	15



On peut représenter les normes des vecteurs sur le graphique de l'horaire. Les directions des vecteurs aux temps discrets sont données par les composantes V_x et V_y de la vitesse par construction géométrique de vecteurs ; le vecteur vitesse a pour origine le point correspondant à la position du mobile au temps t , sa direction est tangente à la courbe horaire et a pour longueur l'hypothénuse du triangle formé par les composantes x et y , le sens est donné par les signes des valeurs algébriques de composantes (pour simplifier la lisibilité on essaie de conserver les mêmes unités pour les distances et vitesses, du moins on emploie au mieux un facteur entier, ici 1/4). Lorsque le vecteur est parallèle à l'axe Ox, cela signifie que la pente de ce vecteur donnée par y en fonction de x est nulle. Les variables x et y étant dépendantes du temps, on peut calculer la dérivée par la règle de dérivation de fonction composée ($y=f(x(t))$) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3y_A t^2 + 2y_B t}{3x_A t^2 + 2x_B t} = 0 \Rightarrow 3y_A t^2 + 2y_B t = 3(1)t^2 + 2(-2)t = 3t^2 + -4t = 0 \Rightarrow$$

$$t_{v//Ox} = \frac{4}{3} = 1.33[s] \quad r_{v//Ox} = \begin{pmatrix} 4 * (\frac{4}{3})^2 \\ 1 * (\frac{4}{3})^3 - 2 * (\frac{4}{3})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [m] \\ [m] \end{pmatrix} \quad r_{v//Ox} = \begin{pmatrix} 7.11 \\ -1.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [m] \\ [m] \end{pmatrix}$$

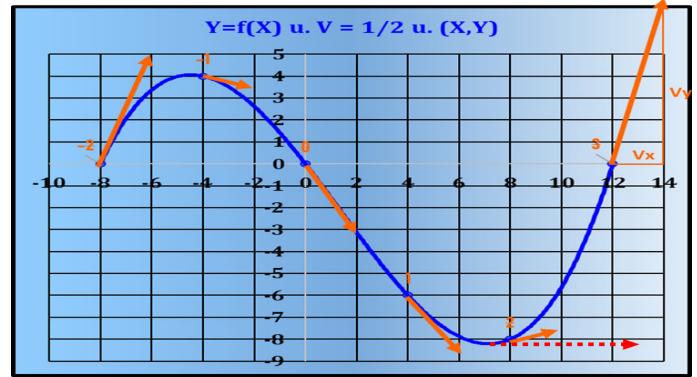
Ex 3.4 Dans un référentiel othonormé Ox, Oy, un mobile a l'horaire

$$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t \quad \text{où } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & [ms^{-3}] \\ 1 & [ms^{-3}] \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & [ms^{-2}] \\ -1 & [ms^{-2}] \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 4 & [ms^{-1}] \\ -6 & [ms^{-1}] \end{pmatrix}$$

a) Représenter la trajectoire et la vitesse, de seconde en seconde, de la date -2 s à la date 3 s. b) Où et quand la vitesse est-elle parallèle à l'axe Ox ?

a) Comme précédemment, on calcule les horaires de la position et de la vitesse en fonction du temps dans un tableur et on crée un graphique des deux, $y=f(x)$ et $V_y=f(V_x)$.

$t_1(s)$	-2	-1	0	1	2	3
$x(m)$	-8	-4	0	4	8	12
$y(m)$	0	4	0	-6	-8	0
$V_x(m/s)$	4	4	4	4	4	4
$V_y(m/s)$	10	-1	-6	-5	2	15



On peut représenter les normes des vecteurs sur le graphique de l'horaire. Les directions des vecteurs aux temps discrets sont données par les composantes V_x et V_y de la vitesse par construction géométrique de vecteurs ; le vecteur vitesse a pour origine le point correspondant à la position du mobile au temps t , sa direction est tangente à la courbe horaire et a pour longueur l'hypothénuse du triangle formé par les composantes x et y , le sens est donné par les signes des valeurs algébriques de composantes (pour simplifier la lisibilité on essaie de conserver les mêmes unités pour les distances et vitesses, du moins on emploie au mieux un facteur entier, ici 1/2). Lorsque le vecteur est parallèle à l'axe Ox, cela signifie que la pente de ce vecteur donnée par y en fonction de x est nulle. Les variables x et y étant dépendantes du temps, on peut calculer la dérivée par la règle de dérivation de fonction composée ($y=f(x(t))$) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3y_A t^2 + 2y_B t + y_C}{3x_A t^2 + 2x_B t + x_C} = 0 \Rightarrow 3y_A t^2 + 2y_B t + y_C = 3(1)t^2 + 2(-1)t + -6 \Rightarrow$$

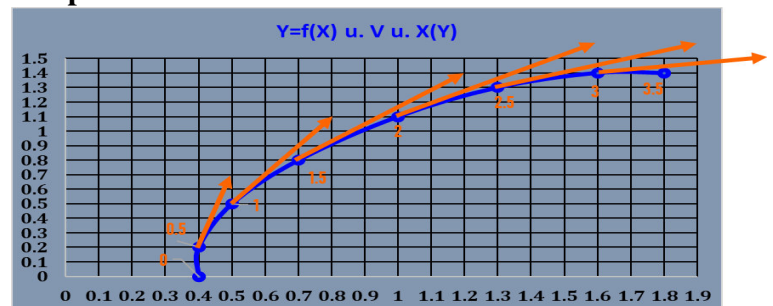
$$3t^2 - 2t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{(4 - 4(3)(-6))}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{(4 - 4(3)(-6))}}{6} = \begin{cases} t_{v//Ox} = 1.78[s] \\ -1.11 (t < 0) \end{cases}$$

$$r_{v//Ox} = \begin{pmatrix} 4 * 1.78 & [m] \\ 1.78^3 + -1 * 1.78^2 - 6 * 1.78 & [m] \end{pmatrix} \quad r_{v//Ox} = \begin{pmatrix} 7.14 & [m] \\ -8.2 & [m] \end{pmatrix} \quad |v_{//Ox}| = 10.9[m s^{-1}]$$

Ex 3.5 Un mobile se déplaçant dans un plan a l'horaire suivant. Représenter graphiquement la trajectoire. Déterminer et représenter les vitesses aux points où cela est possible.

$t_1(s)$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$x(m)$	0.4	0.4	0.5	0.7	1	1.3	1.6	1.8
$y(m)$	0	0.2	0.5	0.8	1.1	1.3	1.4	1.4

$V_x(m/s)$	0.1	0.3	0.5	0.6	0.6
$V_y(m/s)$	0.5	0.6	0.6	0.5	0.3



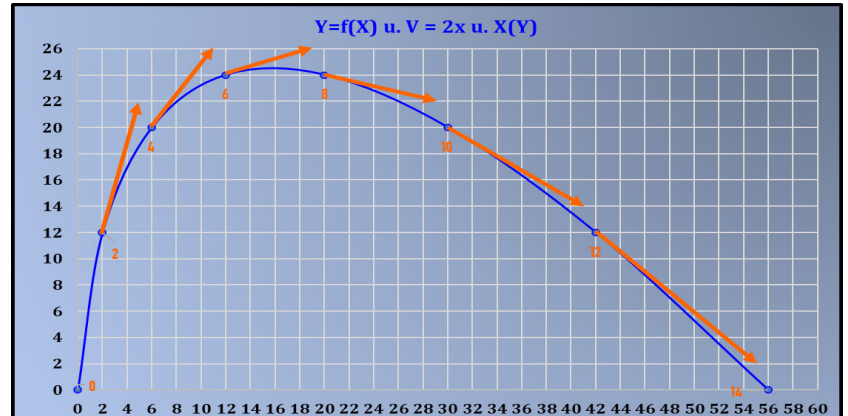
Dans un tableur, on calcule les vitesses moyennes (dx/dt - dy/dt) dans un intervalle de 1 s centrées aux points horaires, mais on ne peut pas avoir de certitude sur les vitesses aux points extrêmes, compte tenu du fait que l'on n'a pas d'informations sur les positions respectivement avant et après le rayon de temps (0.5s), donc on obtient 6 valeurs. On représente les vitesses sur le graphique (ici unité longueur = u. vitesse).

Ex 3.6 Un objet ponctuel a l'horaire suivant, exprimé dans un référentiel othonormé . Représenter la trajectoire, et les vitesses aux points où cela est possible.

On procède exactement de la même manière que dans l'exercice précédent. Dans un tableur, on calcule les vitesses moyennes ($dx/dt - dy/dt$) dans un intervalle de 1 s centrées aux points horaires, mais on ne peut pas avoir de certitude sur les vitesses aux points extrêmes, compte tenu du fait que l'on n'a pas d'informations sur les positions respectivement avant et après le rayon de temps (0.5s), donc on obtient 6 valeurs. On représente les vitesses sur le graphique (ici unité longueur = 2 u. vitesse)

$t_1(s)$	0	2	4	6	8	10	12	14
$x(m)$	0	2	6	12	20	30	42	56
$y(m)$	0	12	20	24	24	20	12	0

$Vx(m/s)$		1.5	2.5	3.5	4.5	5.5		
$Vy(m/s)$			5	3	1	-1	-3	



Ex 3.7 Un touriste monte sur une montagne et redescend par le même chemin. A l'aller, sa vitesse est de 3 km/h. Au retour, elle est de 7 km/h . Calculer sa vitesse moyenne.

Les vitesses n'étant pas les mêmes à l'aller et au retour, les temps de parcours, à calculer, seront également différentes. La vitesse moyenne est le rapport de la distance totale parcourue par le temps de parcours. En posant d pour une distance aller et t1 et t2 les temps respectifs, on a :

$$\underline{v_{moy}} = \frac{d_{tot}}{t_{tot}} = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2d}{d \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 4.2(m/s)$$

Ex 3.8 Un train parcourt 10km à la vitesse de 80 km/h et les 10 km qui suivent à la vitesse de 100 km/h. A quelles vitesse aurait-t-il dû circuler pour franchir ces 20 km dans le même temps, avec un mouvement uniforme.

Afin de connaître la vitesse moyenne nécessaire à parcourir le même trajet dans le même temps, il faut calculer le temps total mis pour effectuer le parcours. Connaissant la distance totale, on obtient alors la vitesse équivalente pour effectuer ce même parcours dans le même temps. Le problème est très similaire au précédent.

$$\underline{v_{equiv.}} = \frac{d_{tot}}{t_{tot}} = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2d}{d \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 88.9(km/h)$$

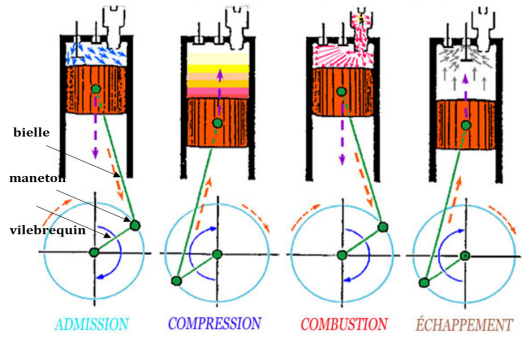
Ex 3.9 Dans une machine, un axe tourne à raison de 1200 tours par minute. Il a un diamètre de 3 cm. Quelle est la vitesse d'un point de la périphérie de cet axe ?

La vitesse constante du point en rotation est un scalaire donné par le rapport de la distance parcouru δL par le temps de parcours δt . En mouvement de rotation elle peut être formulée par le rapport de l'abscisse curviligne d'un tour de 360 degrés ($2\pi R$) , par la période T de rotation. La fréquence de rotation donnée dans l'énoncé est le rapport du nombre de tour par unité de temps, l'inverse de cette fréquence est justement la période recherchée, c'est le temps d'un cycle de rotation. Pour obtenir la vitesse en unités conventionnelles, il suffit de multiplier par des facteurs de conversion adéquates .

$$\underline{\nu(tr/s)} = \frac{1200(tr/min)}{60(s/min)} = 20(tr/s) \quad \underline{V} = \frac{2\pi R}{T} \stackrel{T=\frac{1}{\nu}}{=} 2\pi R\nu = 2\pi 0.015 * 20(m/s) = 1.885(m/s)$$

Ex 3.10 Dans un cylindre de moteur à explosion, le piston a une course de 84.4 mm. Calculer la vitesse maximale du piston lorsque le moteur tourne à 5000 tours par minutes. On remarquera que le diamètre du cercle décrit par le point d'attache de la bielle au vilebrequin est égal à la course du piston

Le principe mécanique du moteur à explosion consiste en la transformation d'un mouvement linéaire périodique d'aller retour en une rotation cyclique, grâce à l'explosion d'un mélange d'essence et d'air. En effet, La bielle (BI), est attachée à l'axe du piston et au vilebrequin (VB) à son autre extrémité, transfère le mouvement d'aller retour du piston (P) en une rotation du VB. Lorsque le bras du VB aligné à la bielle en position basse remonte jusqu'à la position haute, le P est déplacé d'une longueur 2R, R étant le rayon du cercle parcouru par le maneton (articulation entre la BI et le VB) autour du centre du VB. Orientation de la rotation inversée dans schéma ci-contre.

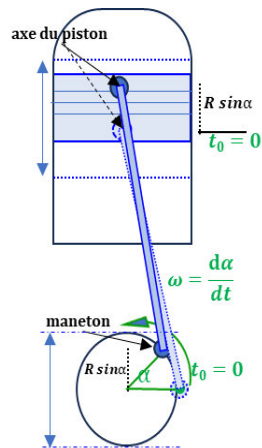


Une fonction trigonométrique nous permet de connaître la position du piston en fonction du temps puisqu'elle permet de mettre en relation entre un paramètre de mouvement circulaire en distance linéaire de parcours. Comme la vitesse est la dérivée de cette fonction , on peut la déterminer et identifier sa valeur maximale. Partons des principes élémentaires analytiques. Traçons un cercle trigonométrique et caractérisons la vitesse angulaire. Celle-ci par définition est le rapport de l'angle parcouru par le rayon (convention , de sens positif, dans le sens inverse des aiguilles). Lorsqu'un tour du cercle est effectué le délai de temps pour le parcourir est défini comme la période T . L'angle du tour complet est 2Pi. Ce rapport est appelé omega, la vitesse angulaire. Pour notre problème cette

$$\text{vitesse est constante. } v_{angulaire} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \stackrel{\text{vitesse constante}}{=} \frac{2\pi}{T}$$

Par intégration du différentiel de l'angle on obtient la relation entre l'angle et le temps :

$$\alpha = \int d\alpha = \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2\pi}{T} t + k = \omega t + k$$



Posons maintenant la fonction qui représente la position du piston en fonction du temps. Considérons le déplacement à partir du moment où la vilebrequin est à l'horizontal et fait un angle droit avec la verticale, le maneton est à alors situé au point t= 0 du cercle trigonométrique. L'horaire du piston et sa vitesse peuvent être alors déterminées :

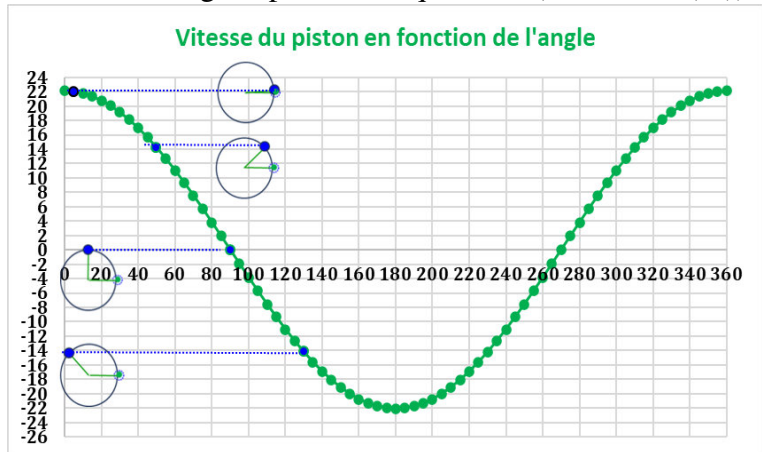
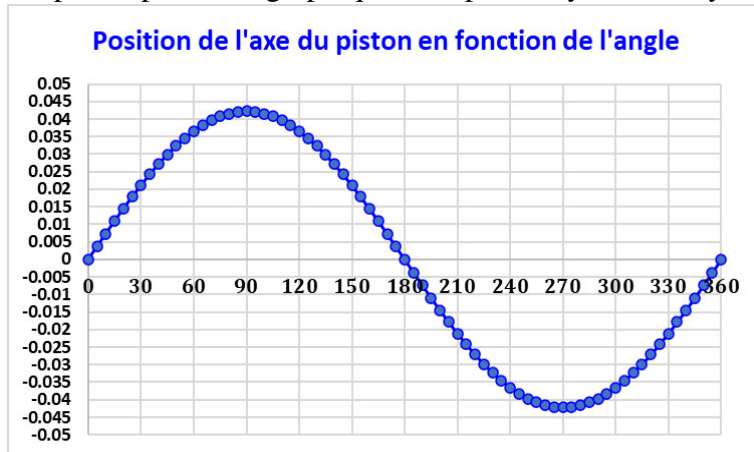
$$h(t) = R \sin(\alpha) = R \sin(\omega t + k) \stackrel{k=h_0=h(0)=0}{=} R \sin \omega t \quad v = \frac{dh}{dt} = \omega R \cos(\alpha) = \omega R \cos(\omega t)$$

$$v = \frac{2\pi}{T} R \cos(\omega t) \quad \text{Or, } v = \text{maximale lorsque : } \cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 0 + 2k\pi \Rightarrow v_{max} = \omega R = \frac{2\pi R}{T}$$

Pour connaître sa valeur en unité de longueur et de temps, il nous faut convertir la vitesse donnée en tour minute en m/s. Le Rayon étant comme on l'a montré égale à la moitié de la course du piston

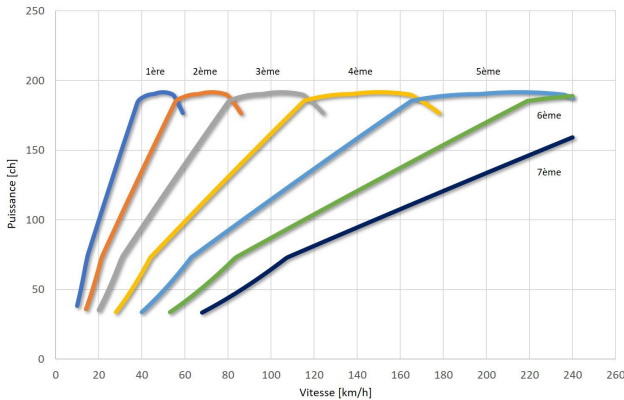
$$v_{max} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R \nu = 2\pi R \left\{ \frac{[m]}{[tr]} \right\} \nu \left\{ \frac{[tr]}{[min]} \frac{[min]}{[60s]} \right\} = 2\pi * 0.00422 * \frac{5000}{60} \left[\frac{m}{s} \right] = 22.1 \left[\frac{m}{s} \right]$$

On peut représenter graphiquement positiony et vitessey en fonction de l'angle à partir des équations. (Vmax = V (0°))



Ex 3.11 Un test révèle qu’une voiture atteint 60 km/h en 6.1 s, 80 km/h en 11.2 s, 100 km/h en 17.6 s et 120 km/h en 30.4 s. Calculer approximativement la distance qu’elle doit franchir pour atteindre 120 km/h.

Les données indiquées semblent correspondre aux performances de la voiture, c’est à dire à des accélérations maximales développées et limitée par la puissance de la voiture afin d’atteindre ces vitesses cibles en un temps minimal. Il est connu que la puissance motrice est plus importante à basse vitesse, ce que l’on peut démontrer en analysant dans l’évolution de la transmission entre l’arbre moteur et les pignons de vitesse, les rapports de vitesses et couples . (démontré accessoirement ultérieurement). Sur le graphique ci-contre montrant la puissance d’un véhicule en fonction de la vitesse, pour une vitesse donnée, on observe que la puissance est la plus élevée pour le rapport de vitesse le plus petit (p.ex à 40 km/h).

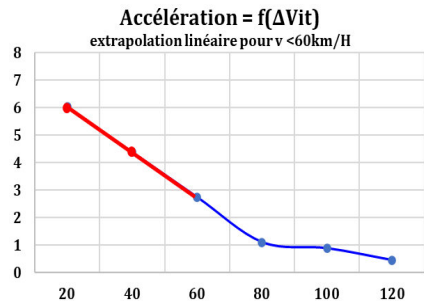


<https://www.guillaumedarding.fr/technique-de-conduite-acceleration-et-reprise-3174106.html>

Pour analyser le problème, entrons les données dans un tableur. Calculons les accélérations "moyennes" pour chaque vitesse cible, càd, le rapport entre la vitesse atteinte et le délai requis, puisque la vitesse et le temps initiaux sont nuls. Comme attendu en accord avec la réalité technique, ces valeurs sont inversement proportionnelles aux vitesses cibles, mais elles sont aussi très grossières, l’intervalle de temps étant important et en progression non proportionnelle. Si on applique l’équation horaire directement à la vitesse de 120km/h, (d= 0+0+1/2at2), on obtient un résultat basé sur une accélération moyenne grossière, ce qui est en principe une procédure biaisée puisque l’accélération est mal approximée (on peut aussi calculer cette distance par une autre formule. V. image tableur), de plus l’accélération n’est pas nécessairement constante, compte tenu des changements de rapport de vitesses à effectuer avec une variation de puissance, comme vu plus haut et le délai initiale de temps nécessaire pour mettre le véhicule en mouvement. Dans ce cas on ne peut employer l’équation horaire établie que sur une accélération constante . Il faut donc appliquer cette équation dans de petits intervalles où l’accélération est prise pour constante, ce que l’on suppose être approximé dans intervalle de passage d’une vitesse donnée à la vitesse successive, cet intervalle est de 20 km/h à partir de 60km/h. La variable temporelle est évidemment ici l’intervalle de temps entre le temps précédent écoulé et le temps de passage à l’étape suivante. Pour obtenir le résultat attendu , on somme l’ensemble des intervalles de distances parcourues à accélérations prises pour constantes. Avec des performances mesurées à intervalles de 10 km/h, on pourrait obtenir de meilleures approximations des accélérations progressives centrées sur les temps donnés sur un intervalle de 20 km/h à comparer nécessairement avec des valeurs reportées sur 10 km/h selon la procédure appliquée dans notre cas .

$$\delta l = l_0 + V_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \qquad L = \sum_{i=0}^3 L_i + Vi(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} * a_{i+1/i} * (t_{i+1} - t_i)^2 = 701(m)$$

t (s)	V pointe (m/s)	V pointe (km/h)	A moy. (m/s²)	1/2 A moy. (m/s²)	A progre- ssive (m/s²)	d parcou- rue (m) / A progr.	d totale (m)	
0	0	0.00						
6.1	60	16.67	2.73	1.37	2.73	50.83	506.67	d = Vmoy (33.3/2) * t (30)
11.2	80	22.22	1.98	0.99	1.09	99.17	506.67	d = 1/2 * A moy * t²
17.6	100	27.78	1.58	0.79	0.87	160.00	253.33	d = 1/2 * 1/2 A moy * t³
30.4	120	33.33	1.10	0.55	0.43	391.11		
	MOY>	25.00	1.85	0.92	0.46	701.11	< d totale	



Ex 3.12 Une voiture de sport peut atteindre 40 km/h en 2.4 s, 60 km/h en 4.0 s, 80 km/h en 5.7 s, 100 km/h en 8.5 s, 120 km/h en 11.3 s et 140 km/h en 15.5 s . Calculer approximativement la distance qu'elle doit franchir pour atteindre 140 km/h.

On procède exactement comme dans l'exercice précédent. (V Ex 3.11). On peut également prendre les moyennes des accélérations centrées sur les temps donnés avec pour intervalle de 40 km/h pour lesquels temps ces valeurs sont calculables . On remarque que l'écart de distances franchies obtenue avec la méthode employée dans l'exercice précédent et celle obtenue en intégrant des valeurs moyennes centrées sur les temps donnés (intervalle de 40 km/h) est important, ce qui signifie, qu'il faudrait des test avec des intervalles de 10km/h pour obtenir une meilleure approximations d'accélérations d'intervalle de 20 km/h centrée sur les temps donnés, à comparer avec des intervalle de 10km/h reporté sur le temps suivant, méthode que l'on a appliquée dans les deux exercices. Des données sur des intervalles de 1km/h pour les deux véhicules testés nous permettraient d'estimer l'erreur sur distance franchie et de proposer la marge minimale d'intervalle de vitesse pour laquelle cette erreur est insignifiante et de déterminer le nombre suffisant de données pour obtenir une bonne approximation de la grandeur mesurée.

$$\delta l = l_0 + V_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad L = \sum_{i=0}^3 L_i + V_i(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} * a_{i+1/i} * (t_{i+1} - t_i)^2 = 138(m)$$

t (s)	V pointe (m/s)	V pointe (km/h)	A moy. (m/s ²)	1/2 A moy. (m/s ²)	A progre- ssive (m/s ²)	d interv. parcourue / A progr.	d totale (m)		V progr. = d int/Δt (m/s)	A succ. = ΔV progr. /Δt (m/s)
0	0	0.00								
2.4	40	11.11	4.63	2.31	4.63	13.33	301.39	d = Vmoy (39/2) * t (15)	5.56	2.31
4	60	16.67	4.17	2.08	3.47	22.22	301.39	d = 1/2 * A moy * t ²	13.89	5.21
5.7	80	22.22	3.90	1.95	3.27	33.06	150.69	d = 1/2 * 1/2 A moy * t ²	19.44	3.27
8.5	100	27.78	3.27	1.63	1.98	70.00	333.56	d = 1/2 * Moy A progr * t ²	25.00	1.98
11.3	120	33.33	2.95	1.47	1.98	85.56	214.44	d = 1/2 * Moy 1/2 A moy * t ²	30.56	1.98
15.5	140	38.89	2.51	1.25	1.32	151.67			36.11	1.32
MOY	77.14	21.43	3.57	1.79	2.78	138.61	< d totale		21.76	2.68

t (s), intra- pollé a=cte / intervalle	V pointe (m/s)	V pointe (km/h)	A moy. (m/s ²)	1/2 A moy. (m/s ²)	A pr.centrée intrv. 20km/h	d interv. parcourue / A progr.	d totale (m)		d interv. parcourue / A progr.	A pr.centrée intrv. 20km/h et intrapolation A (m/s ²)
0	0	0.00								
1.2	20	5.56							13.3333	4.63
2.4	40	11.11	4.63	2.31	4.63	13.33	301.39	d = Vmoy (39/2) * t (15)	31.1111	3.97
4	60	16.67	4.17	2.08	3.37	55.00	301.39	d = 1/2 * A moy * t ²	55	3.37
5.7	80	22.22	3.90	1.95	2.47	100.00	150.69	d = 1/2 * 1/2 A moy * t ²	100	2.47
8.5	100	27.78	3.27	1.63	1.98	155.56	0.00	d = 1/2 * Moy A progr * t ²	155.556	1.98
11.3	120	33.33	2.95	1.47	1.59	233.33	135.505	d = 1/2 * Moy 1/2 A moy * t ²	233.333	1.59
15.5	140	38.89	2.51	1.25	1.32	151.67			326.667	1.32
19.7	160	44.44	2.26	1.13		323.89	< d totale		355.00	

La valeur moyenne qui se rapproche de la distance calculée à partir de la somme des intervalles à accélération supposée constante est celle obtenue en appliquant l'équation horaire (v0 = 0 , r0 = 0) avec pour accélération prise comme le rapport de la moitié de la vitesse (vit moyenne sur l'intervalle 0 et 140 km/h) au délai de temps (15.5s), mais cette faible différence (<10%) est toute fortuite , on a un écart bien plus important pour le véhicule de l'exercice précédent .

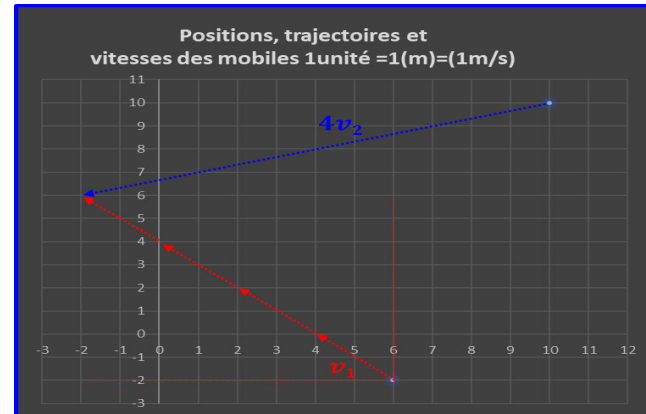
Ex 3.13 Un mobile passe au point (6 m ; -2 m) à la vitesse (-2 m/s ; 2 m/s) Son mouvement est rectiligne uniforme. Au même instant, un second mobile est lancé du point (10 m ; 10 m). Quelle vitesse constante doit-il avoir pour rencontrer le premier mobile 4 s plus tard.

Le mobile a un MRU, son accélération est donc nulle. Représentons sur un plan orthonormée, les positions, trajectoires et normes de vitesses des deux mobiles. On écrit également les équations horaires compte tenu du MRU ; chaque mobile parcourt $v \cdot t$. Les positions des 2 mobiles étant identiques après 4 s, on pose l'égalité des 2 équations horaires et l'on tire de celle-ci la vitesse du deuxième mobile.

$$\begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{10} + v_{1x}t \\ y_{10} + v_{1y}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{20} + v_{2x}t \\ y_{20} + v_{2y}t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 + -2 \cdot 4 \\ -2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 4v_{2x} \\ 10 + 4v_{2y} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - 10 \\ 6 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(m/s) \\ -1(m/s) \end{pmatrix}$$



Le rapport des composants de la vitesse calculée du mobile 2 correspond bien à la pente du vecteur vitesse aisément visualisé sur le graphique.

Ex 3.14 Un mobile passe au point (100 m ; -120 m) à la date 10 s et au point (40 m ; 60 m) à la date 20 s. Établir son horaire analytique, sachant que sa vitesse est constante.

Le mobile a un MRU, son accélération est donc nulle. Représentons sur un plan orthonormée, les positions du mobile aux dates données et sa trajectoire. On peut aussi représenter les normes de la vitesses attendue du mobile, en se basant sur les calculs ; la vitesse étant donné par le rapport de la distance (projetée) parcourue entre deux dates quelconque par le temps de parcours ($v = \text{cte}$). La vitesse étant constante et déterminée, on doit déterminer la position du mobile à la date 0 pour établir l'équation analytique en due forme. A cet effet, on recherche la position du mobile à la date = -10 s, position correspondant à la date 0 s, il ne reste

plus qu'à poser l'équation analytique. $V = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta d_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta d_y}{\Delta t} \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{40-100}{20-10}(m/s) \\ \frac{60-(-120)}{20-10}(m/s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6(m/s) \\ 18(m/s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{10} + tV_x(m) \\ Y_{10} + tV_y(m) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100(m) + (-10)V_x(m) \\ -120(m) + (-10)V_y(m) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160(m) \\ -300(m) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160(m) \\ -300(m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ -1t \end{pmatrix}$$

