

Monard mécanique- Exercices relatifs aux chapitres 4 ; Accélération

Ex 4.1 Dans un référentiel orthonormé, un mobile a un horaire

$$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t \quad \text{où } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-2}] \\ [ms^{-3}] \end{matrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-2}] \\ [ms^{-2}] \end{matrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-1}] \\ [ms^{-1}] \end{matrix}$$

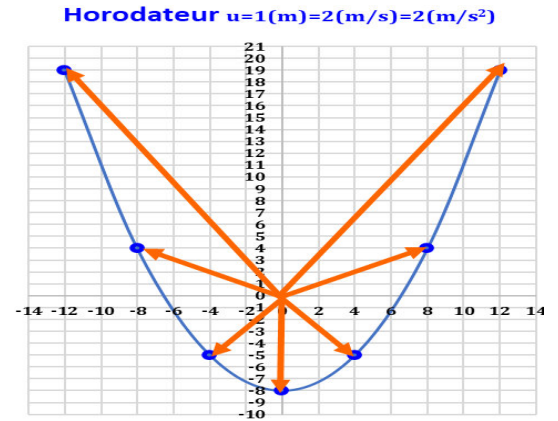
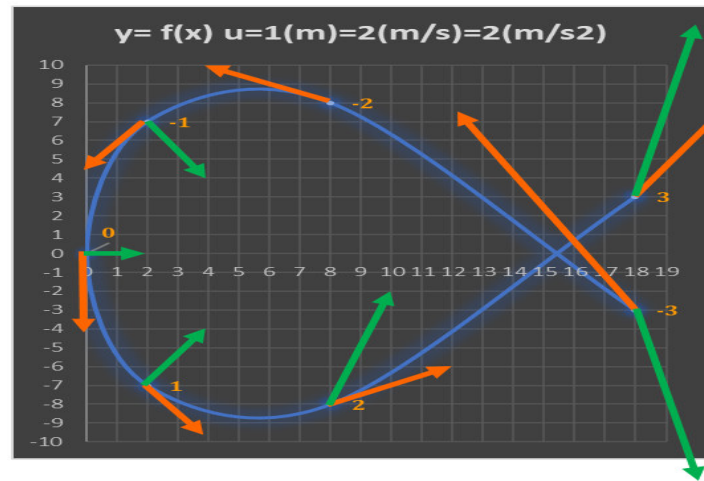
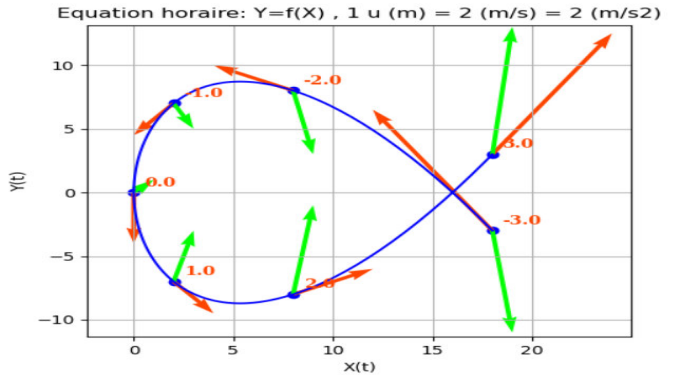
Calculer la position, la vitesse (v) et l'accélération (a) du mobile dans l'intervalle allant de -3 à 3 s. Représenter graphiquement la trajectoire en s'aidant des vecteurs v, qui lui sont tangents. Représenter également a.

On dispose ici de l'équation horaire analytique vectorielle paramétrique (p= temps), en se basant sur les définitions de la vitesse et de l'accélération, on peut déterminer les éq. de v et de a, obtenues par 2 dérivations successives.

$$\vec{v} = 3\vec{A}t^2 + 2\vec{B}t + \vec{C} \quad \vec{a} = 6\vec{A}t + 2\vec{B}$$

On résout les éq. scalaires en coordonnées orthonormées, projections vectorielles, pour les différentes valeurs de t dans un tableur et on représente des graphiques (Excel / Python).

t(s)	-3	-2	-1	0	1	2	3
x(m)	18	8	2	0	2	8	18
y(m)	-3	8	7	0	-7	-8	3
v _x (m/s)	-12	-8	-4	0	4	8	12
v _y (m/s ²)	19	4	-5	-8	-5	4	19
a _x (m/s ²)	4	4	4	4	4	4	4
a _y (m/s ²)	-18	-12	-6	0	6	12	18

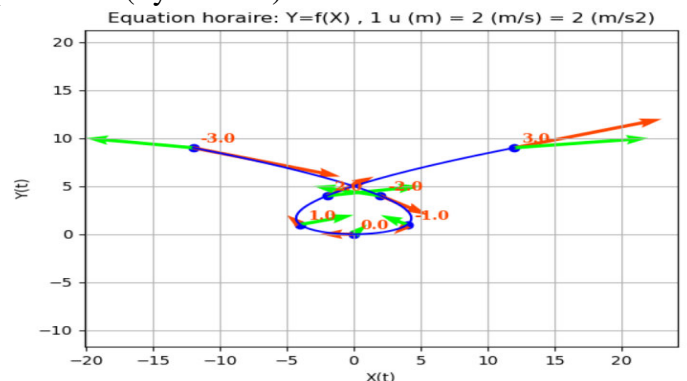


Ex 4.2 Dans un référentiel orthonormé, un mobile a un horaire

$$\vec{r} = \vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t \quad \text{où } \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-2}] \\ [ms^{-3}] \end{matrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-2}] \\ [ms^{-2}] \end{matrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [ms^{-1}] \\ [ms^{-1}] \end{matrix}$$

Calculer la position, la vitesse et l'accélération du mobile dans l'intervalle allant de -3 s à 3 s. Représenter graphiquement la trajectoire en s'aidant des vecteurs vitesse, qui lui sont tangents. Représenter également l'accélération. On procède de la même manière que dans l'exercice précédent (Python 2D)

t(s)	-3	-2	-1	0	1	2	3
x(m)	-12	2	4	0	-4	-2	12
y(m)	9	4	1	0	1	4	9
v _x (m/s)	22	7	-2	-5	-2	7	22
v _y (m/s)	-6	-4	-2	0	2	4	6
a _x (m/s ²)	-18	-12	-6	0	6	12	18
a _y (m/s ²)	2	2	2	2	2	2	2



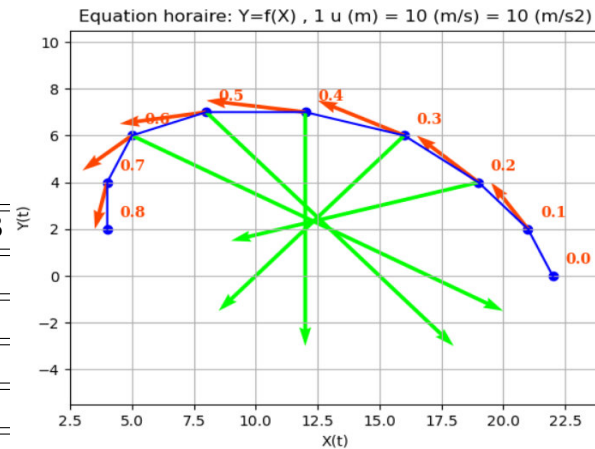
Ex 4.3 Un mobile se déplace dans un plan. Sa position au cours du temps est donné par le tableau suivant :

$t(s)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$x(m)$	22	21	19	16	12	8	5	4	4
$y(m)$	0	2	4	6	7	7	6	4	2

On fournit les valeurs horaires dans un tableur, et on calcule les vitesses et accélérations centrées sur les dates données et d'intervalle de 0.2 (s). Les valeurs extrêmes des vitesses ne sont pas déterminées puisqu'on ne connaît pas les positions aux dates précédentes et ultérieures, de même pour le tableau des accélérations. (V. graphique (Python))

$t(s)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$v_x(m/s)$		-15	-25	-35	-40	-35	-20		
$v_y(m/s)$		20	20	15	5	-5	-15		
$a_x(m/s^2)$			-100	-75	0	100			
$a_y(m/s^2)$			-25	-75	-100	-100			

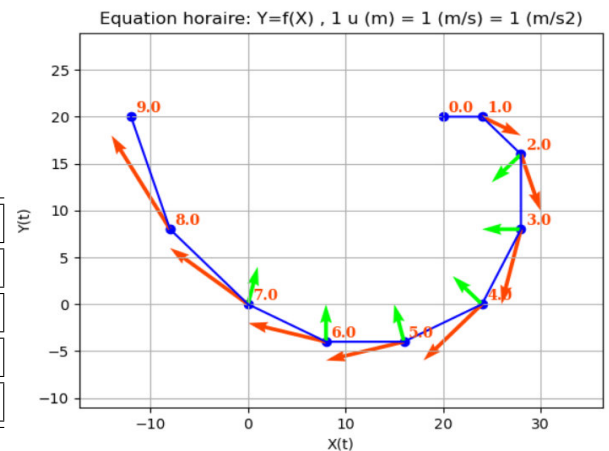
Déterminer la vitesse et l'accélération aux points où cela est possible. Faire une représentation graphique.



Ex 4.4 Déterminer la vitesse et l'accélération d'un mobile ayant l'horaire suivant : On procède de la même manière que pour l'exercice précédent. (V. graphique (Python))

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x(m)$	20	24	28	28	24	16	8	0	-8	-12
$y(m)$	20	20	16	8	0	-4	-4	0	8	20

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_x(m/s)$		4	2	-2	-6	-8	-8	-8	-6	
$v_y(m/s)$		-2	-6	-8	-6	-2	2	6	10	
$a_x(m/s^2)$			-3	-4	-3	-1	0	1		
$a_y(m/s^2)$			-3	0	3	4	4	4		



Ex 4.5 Document expérimental. On photographie en lumière stroboscopique, à une fréquence de 10 par seconde, un objet qui glisse sur un rail à coussins d'air incliné à 2,77°. L'objet remonte la pente. On enregistre les abscisses suivantes, relativement à un axe parallèle au rail : 75,6 cm ; 68,7 ; 62,3 ; 56,4 ; 50,9 ; 45,9 ; 41,4 ; 37,4 ; 33,8 ; 30,7. Calculer les accélérations le long du trajet, et leur moyenne. Comparer le résultat avec celui de l'ex. 3 (p. 46). Il faut remarquer que les abscisses horaires diminuent avec la date, ce qui ne peut s'interpréter que d'une seule manière, comme l'objet remonte, le référentiel 0 doit être en haut du rail et les données concernent les horaires antérieurs à t_0 que l'on fixe en haut de la pente. On détermine d'abord les vitesses (v) sur un intervalle entre 2 expositions stroboscopiques, par le rapport de la différence entre 2 positions successives et de l'intervalle, ce qui nous donne une vitesse moyenne juxtaposée au temps d'exposition mais en réalité par ce calcul centrée sur la demie-intervalle. De même pour l'accélération (a). On obtient donc pour 10 valeurs de positions, 9 pour v , et 8 pour a . Comme la fréquence d'exposition photographique est de 10 s, les intervalles d'exp. sont donc de 0.1 s, on pose pour le début de la date $t_0' = 0$. On ne peut calculer v et a dans le sens inverse, manquant de données. Une équation analytique ne serait pas de grande utilité puisque a n'est pas constante, on ne peut que partir du présumé de a cte pour affirmer que les vit. sont identiques dans le sens inverse et que l'on est dans une situation de réversibilité (v . la ballistique), ($a_{moy} = 4.75$ (m/s²)).

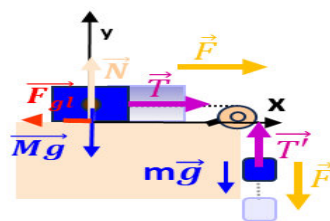
$t(s)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$x(m)$	0.756	0.687	0.623	0.564	0.509	0.459	0.414	0.374	0.338	0.307
$v_x(m/s)$		-0.69	-0.64	-0.59	-0.55	-0.5	-0.45	-0.4	-0.36	-0.31
$a_x(m/s^2)$			0.5	0.5	0.4	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5



On procède de la même manière que dans l'exercice précédent. Les vitesses et accélérations sont calculées sur l'unité d'intervalle stroboscopique, mais représentant toujours la moyenne sur la demie-intervalle. L'accélération varie de 0.6 à 0.7 m/s², ce qui représente une erreur relative de 14 % et < 10% par rapport à la moyenne.

$t(s)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$\bar{a}$
$x(m)$	0.197	0.206	0.221	0.243	0.271	0.305	0.345	0.392	0.445	0.505	
$v_x(m/s)$		0.09	0.15	0.22	0.28	0.34	0.4	0.47	0.53	0.6	
$a_x(m/s^2)$			0.6	0.7	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	0.7	0.64

<i>Erreur</i>	<i>Ec.max</i> (étendue)	<i>Ec.maxrel</i>	<i>Ec.moy</i>	<i>EcartType</i>	$\bar{a}(Moy)$
	$a_{max} - a_{min}$	$\frac{Ec.max}{MoyEc.max}$	$\frac{1}{8}\sigma x_i - \bar{a} $	$\sqrt{\frac{1}{8}\sigma(x_i - \bar{a})^2}$	$\frac{\sigma x_i}{8}$
$(m/s^2)/-$	0.1	0.15	0.047	0.05	0.638



On procède de la même manière que dans l'exercice précédent. Les vitesses et accélérations sont calculées sur l'unité d'intervalle stroboscopique, mais représentant toujours la moyenne centrée sur la demie-intervalle, ce qui est une bonne approximation. La fréquence de projection stroboscopique étant de 50 par seconde, l'intervalle entre deux flashes lumineux égale l'inverse de cette valeur, donc 0.02 s. L'accélération varie de 7.5 à 12.5 m/s², ce qui représente une variation relative de 67 % et 25% par rapport à la moyenne.

$t(s)$	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	0.22	0.24	0.26	0.28
$x(m)$	0.033	0.042	0.054	0.07	0.089	0.113	0.141	0.172	0.208	0.248	0.292	0.34	0.393	0.449	0.51
$v_x(m/s)$		0.45	0.6	0.8	0.95	1.2	1.4	1.55	1.8	2	2.2	2.4	2.65	2.8	3.05
$a_x(m/s^2)$			7.5	10	7.5	12.5	10	7.5	12.5	10	10	10	12.5	7.5	12.5

Ci-dessous différentes données statistiques anecdotiques. On ne peut pas affirmer que l'accélération est constante, compte tenu des résultats statistiques obtenus, mais en observant les données on a des paires de valeurs extrêmes dont la moyenne égale la moyenne totale ainsi que la valeur d'une grande série d'autres valeurs. Sur ce constat, on peut dire que l'accélération est constante, si on considère que l'erreur systématique de mesure est identique et récurrente pour certaines positions (+/- 25%), même si l'écart relatif moyen est important 15 %. Pour rappel, un écart-type correspond à la marge d'erreur qu'il faut ajouter ou retrancher à la valeur centrale pour comprendre environ 67 % de la population des accélérations. Avec 2 DST on comprend 95% de la population, la déviation obtenue semble surestimée ,100 % des accélérations sont comprises dans l'intervalle de [10-4;10+4]).

<i>Erreur</i>	<i>Ec.max</i> (étendue)	<i>Ec.maxrel</i>	<i>Ec.moy</i>	<i>EcartType</i>	$\bar{a}(Moy.)$
$(n = 13)$	$a_{max} - a_{min}$	$\frac{Ec.max}{MoyEc.max}$	$\frac{1}{n} \Sigma x_i - \bar{a} $	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \Sigma (x_i - \bar{a})^2}$	$\frac{\sigma_{x_i}}{8}$
$(m/s2)/-$	5	0.5	1.538	2.04	10

Ex 4.8 Document expérimental. Une bille lancée obliquement en l'air est éclairée par un stroboscope à une fréquence de 50 s-1. On enregistre photographiquement les positions suivantes (Ox est horizontal, Oy est vertical et orienté vers le bas) : (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084), (0.003 :0.084). Vérifier que l'accélération est à peu près toujours la même (selon le & 27). Calculer la moyenne des accélérations obtenues.

On procède de la même manière que dans l'exercice précédent. Les vitesses et accélérations sont calculées sur l'unité d'intervalle stroboscopique, mais représentant toujours la moyenne centrée sur la demie-intervalle, ce qui est une bonne approximation. La fréquence de projection stroboscopique étant de 50 par seconde, l'intervalle entre deux flashes lumineux égale l'inverse de cette valeur, donc 0.02 s.

<i>t</i>	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	0.22	0.24	0.26	0.28	0.3
<i>x</i>	0.003	0.027	0.052	0.077	0.102	0.128	0.153	0.178	0.203	0.228	0.254	0.279	0.304	0.33	0.355	0.379
<i>y</i>	0.084	0.067	0.056	0.048	0.044	0.043	0.046	0.054	0.066	0.081	0.1	0.123	0.15	0.181	0.216	0.255
<i>v_x</i>		1.2	1.25	1.25	1.25	1.3	1.25	1.25	1.25	1.25	1.3	1.25	1.25	1.3	1.25	1.2
<i>v_y</i>		-0.85	-0.55	-0.4	-0.2	-0.05	0.15	0.4	0.6	0.75	0.95	1.15	1.35	1.55	1.75	1.95
<i>a_x</i>			2.5	0	0	2.5	-2.5	0	0	0	2.5	-2.5	0	2.5	-2.5	-2.5
<i>a_y</i>			15	7.5	10	7.5	10	12.5	10	7.5	10	10	10	10	10	10

Ci-dessous différentes données statistiques anecdotiques. L'accélération varie de 7.5 à 12.5 m/s², ce qui représente une variation relative de 67 % et 25% par rapport à la moyenne, l'écart moyen est de 14 %. Ici également l'accélération n'est pas strictement constante, compte tenu des résultats statistiques obtenus, mais en observant les données on a, à une exception près (1ère accélération verticale), des paires de valeurs extrêmes qui s'annulent et dont la moyenne égale la moyenne totale ou la valeur d'une grande série d'autres valeurs. Sur ce constat, on peut dire que l'accélération est constante, si on considère que l'erreur systématique de mesure est identique et récurrente (*a_y*) pour certaines positions (+/- 25%), même si l'écart est important. Pour l'accélération horizontale, étant donné que la moyenne est centrée sur 0, les données statistiques d'écart relatif n'ont pas de sens. On constate juste que des paires de valeurs s'annulent à la moyenne. Entre parenthèse, les écarts maximaux absolus et relatifs pour l'accélération verticale, sans la première valeur. Pour rappel, un écart-type correspond à la marge d'erreur qu'il faut ajouter ou retrancher à la valeur centrale pour comprendre environ 67 % de la population des accélérations. (2 ET 95%, on a en effet 1 valeur à l'écart).

<i>Erreur</i>	<i>Ec._{max}</i> (étendue)	<i>Ec._{maxrel}</i>	<i>Ec.moy</i>	<i>EcartType</i>	<i>$\bar{a}$</i> (<i>Moy.</i>)
<i>n</i> = 14)	<i>a_{max}</i> - <i>a_{min}</i>	$\frac{Ec_{max}}{MoyEc_{max}}$	$\frac{1}{n} \sum a_i - \bar{a} $	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (a_i - \bar{a})^2}$	$\frac{\sum a_i}{14}$
<i>a_x</i> (m/s ²)/-	5	-	1.429	-	0
<i>a_y</i> (m/s ²)/-	7.5(5)	0.66(0.5)	1.07	1.96	10

Ex 4.9 Un motocycliste roule à 60 km/h. Son véhicule est capable d'une accélération de 4 m/s². a) Combien lui faut-il de temps pour atteindre 70 km/h. b) Quelle distance lui faut-il pour atteindre cette vitesse ?

L'accélération étant défini comme le rapport de la variation de la vitesse par le temps nécessaire pour y parvenir ou la dérivée temporelle de la vitesse, on tire par intégration de l'équation correspondant à cette définition la vitesse en fonction du temps et de la vitesse initiale. Ici l'accélération est considérée comme constante, donc on a une équation affine.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int dv = \int a dt \Rightarrow v_2 - v_1 = at \quad v_2=v, v_1=v_0 \Rightarrow \frac{v - v_0}{a} = t = \frac{70-60}{3.6} \frac{(m/s)}{4(m/s^2)} = 0.69s$$

De l'équation de vitesse on peut obtenir par intégration l'équation horaire ou position en fonction des autres paramètres dont on connaît alors toutes les valeurs.

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow \int v(t) = \int v_0 + at \Rightarrow r_2 - r_1 = v_0 t + a \frac{t^2}{2} \quad r_2=r, r_1=r_0 \Rightarrow r = r_0 + v_0 t + a \frac{t^2}{2} = v_0 t + a \frac{t^2}{2}$$

$$v(t) = \frac{60}{3.6} 0.69 + 4 \frac{(0.69)^2}{2} = 12.53m$$

Ex 4.10 Une voiture roulant à 50 km/h freine soudain. Son accélération dans le freinage est de 5 m/s². Calculer sa vitesse a) après 0.5 s b) après un parcours de 5 m.

On s'appuie sur les définitions et les équations posées dans l'exercice précédent. Connaissant la vitesse initiale et son accélération, on peut déterminer sa vitesse après le délai posée et la distance parcourue en employant les 2 équations développées dans l'exercice précédent. L'accélération étant ici négative puisque la vitesse de la voiture diminue.

$$v_2 = v_1 + at = \frac{50}{3.6} - 5 * 0.5(m/s) = \underline{48.9(m/s)}$$

Pour connaître sa vitesse après un parcours de 5 m, on emploie l'équation horaire développée dans l'exercice précédent basé sur la théorie. En posant pour position initiale 0 et connaissant la distance finale, la vitesse initiale et l'accélération, l'équation nous permet de déterminer l'inconnue t, c'est une équation quadratique. Ce temps est le délai qu'il faut en freinage pour que la voiture parcoure 5m, il permet de déterminer la vitesse finale à partir de la première équation.

$$d = r_2 - r_1 = r - r_0 = v_0 t - a \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} t^2 - v_0 t + d = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \pm \sqrt{(v_0)^2 - 4(\frac{a}{2})d}}{2\frac{a}{2}} \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{(v_0)^2 - 2ad}}{a} = \frac{\frac{50}{3.6} \pm \sqrt{(\frac{50}{3.6})^2 - 2 * 5 * 5}}{a} = \begin{cases} 5.16(s) \\ 0.38(s) \end{cases}$$

La première équation nous permet d'obtenir les deux vitesses possibles :

$$v = v_0 + at = \begin{cases} \frac{50}{3.6} - 5 * 5.15(m/s) = 11.85(m/s) \\ \frac{50}{3.6} - 5 * 0.38(m/s) = -11.85(m/s) \end{cases}$$

La seconde valeur est non pertinente, puisque après un délai infini de freinage, la voiture s'arrête et ne peut reculer. On vérifie toutefois que le délai nécessaire pour atteindre la vitesse pertinente est justifié. Compte tenu de la diminution de la vitesse de la voiture, après un délai bien plus long que 0.5 (s), on s'attend à une réduction de vitesse en dessous de celle obtenue en a) (48m/s), ce qui est bien le cas.

Ex 4.11 Un cycliste roulant à 30 km/h cesse soudain de pédaler. Quelle vitesse aura-t-il 20m plus loin si son accélération due au frottement est de 0.3 m/s².

On s'appuie sur les définitions et les équations posées et basées sur la théorie dans l'exercice 4.9. En posant pour position initiale 0 et connaissant la distance finale, la vitesse initiale et l'accélération, la première équation nous permet de déterminer l'inconnue t, c'est une équation quadratique. Ce temps est le délai qu'il faut pour que le cycliste parcoure 20m, il permet de déterminer la vitesse finale à partir de la seconde équation.

$$d = r_2 - r_1 = r - r_0 = v_0 t - a \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} t^2 - v_0 t + d = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \pm \sqrt{(v_0)^2 - 4(\frac{a}{2})d}}{2\frac{a}{2}} \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{(v_0)^2 - 2ad}}{a} = \frac{\frac{30}{3.6} \pm \sqrt{(\frac{30}{3.6})^2 - 2 * 0.3 * 20}}{a} = \begin{cases} 53(s) \\ 2.51(s) \end{cases}$$

La première équation nous permet d'obtenir les deux vitesses possibles :

$$v = v_0 + at = \begin{cases} \frac{30}{3.6} - 0.3 * 53(m/s) = -7.579(m/s) = -27.3(km/h) \\ \frac{30}{3.6} - 0.3 * 2.51(m/s) = +7.579(m/s) = \underline{27.3(km/h)} \end{cases}$$

La première valeur est non pertinente, puisque après un délai infini de freinage, le cycliste s'arrête et ne peut reculer. On vérifie toutefois que le délai nécessaire pour atteindre la vitesse pertinente est justifié. Compte tenu de la diminution de la vitesse du cycliste en moyenne de a*t, c'est à dire de 0.3 m/s pour 1 seconde, on s'attend à une diminution de l'ordre de 1 m/s, c'est à dire 3.6 km/h, après un délai de 2.5 (s), ce qui est bien le cas.

Ex 4.12 Une voiture roulant sur une route droite a, en un certain point, une vitesse de 80 km/h . En un point situé 50m plus loin, sa vitesse est de 85km/h. Calculer son accélération moyenne dans cet intervalle.

On s'appuit sur les définitions et les équations posées et basées sur la théorie dans l'exercice 4.9. on ne connaît ni le délai nécessaire pour atteindre cette vitesse finale, ni l'accélération. Tous les autres paramètres sont connus et l'on dispose de 2 équations. On élimine le paramètre temporel qui nous ai pas demandé en première instantce, on obtient ainsi l'accélération dans cet intervalle. La première équation nous permet de de déterminer t que l'on introduit dans la seconde :

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \Rightarrow r = r_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$r = \frac{1}{a}\left(v_0(v - v_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)^2\right) \Rightarrow a = \frac{1}{r}\left(v_0(v - v_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)^2\right) = 0.63[\frac{m}{s^2}]$$

On vérifie que la valeur de l'accélération moyenne obtenue est justifiée. A la vitesse de 80km/h, càd 22 m/s, il faut environ 2.5 s pour avancer de 50m. L'accélération moyenne obtenue nous informe que la vitesse varie environ de 0.65 m/s chaque seconde, donc en 2.5 s, 1.6 m/s, càd 6 km/h, ce qui est concordant avec l'augmentation de vitesse de la donnée.

Ex 4.13 Un test révèle qu'une voiture atteint 60 km/h en 6.1 s, 80 km/h en 11.2 s , 100 km/h en 17.6 s et 120 km/h en 30.4 s. Calculer ses accélérations moyennes aux différentes vitesses.

Les données de cet exercice sont les mêmes que celles de l'exercice 3.11, pour lequel il était demandé de calculer la distance franchie en exploitant les performances à ces diverses vitesses pour atteindre la vitesse finale. Ici le calcul est plus simple, puisque l'on applique simplement la définition de l'accélération moyenne, le rapport de la différence successive de la vitesse à l'intervalle de temps, connaissant les vitesses et les intervalles. Les résultats obtenus sont doublement grossier. D'abord parce que les accélérations moyennes calculées se rapportent à la valeur centrale de l'intervalle et non aux accélérations aux vitesses données.

t (s)	V pointe (m/s)	V pointe (km/h)	A moy. (m/s ²)	1/2 A moy. (m/s ²)	A progre- ssive (m/s ²)	d parcou- rue (m) / A progr.	d totale (m)	
0	0	0.00						
6.1	60	16.67	2.73	1.37	2.73	50.83	506.67	d = Vmoy (33.3/2) * t (30)
11.2	80	22.22	1.98	0.99	1.09	99.17	506.67	d = 1/2 * A moy * t ²
17.6	100	27.78	1.58	0.79	0.87	160.00	253.33	d = 1/2 * 1/2 A moy * t ³
30.4	120	33.33	1.10	0.55	0.43	391.11		
	MOY>	25.00	1.85	0.92	0.46	701.11	< d totale	

Mais aussi puisque les intervalles de vitesses sont importants, ce qui justifie bien la dénomination d'accélération moyenne, et ceci d'autant plus pour la première valeur pour laquelle l'intervalle est 3 fois supérieur au autres et qu'en raison de l'inertie de la voiture au démarrage l'évolution de l'accélération n'est pas bien prévisible et demande d'autant plus de divisions. Les valeurs demandées correspondent à celles correspondant à l'intitulé accélération progressive et développé dans l'ex 3.11. Le tableau complet est reporté à nouveau où l'on peut lire ces valeurs.

Accélérations (m/s2) : 2.73, 1.09, 0.87, 0.43

Ex 4.14 Une voiture de sport peut atteindre 40 km/h en 2.4 s, 60 km/h en 4.0 s, 80 km/h en 5.7 s, 100 km/h en 8.5 s, 120 km/h en 11.3 s et 140 km/h en 15.5 s . Calculer ses accélérations moyennes aux différentes vitesses.

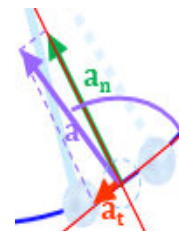
Les données de cet exercice sont les mêmes que celles de l'exercice 3.12, pour lequel il était demandé de calculer la distance franchie en exploitant les performances à ces diverses vitesses pour atteindre la vitesse finale. Ici le calcul est plus simple, puisque l'on applique simplement la définition de l'accélération moyenne, le rapport de la différence successive de la vitesse à l'intervalle de temps correspondant, connaissant les vitesses et les intervalles. Les résultats obtenus sont doublement grossier. D'abord parce que les accélérations moyennes calculées se rapportent à la valeur centrale de l'intervalle et non aux accélérations aux vitesses données. Accélérations (m/s²) : 4.63, 3.47, 3.27, 1.98, 1.98, 1.32

t (s)	V pointe (m/s)	V pointe (km/h)	A moy. (m/s ²)	1/2 A moy. (m/s ²)	A progressive (m/s ²)	d interv. parcourue / A progr.	d totale (m)		V progr. = d int/Δt (m/s)	A succ. = ΔV progr. /Δt (m/s)
0	0	0.00								
2.4	40	11.11	4.63	2.31	4.63	13.33	301.39	d = Vmoy (39/2) * t (15)	5.56	2.31
4	60	16.67	4.17	2.08	3.47	22.22	301.39	d = 1/2 * A moy * t ²	13.89	5.21
5.7	80	22.22	3.90	1.95	3.27	33.06	150.69	d = 1/2 * 1/2 A moy * t ²	19.44	3.27
8.5	100	27.78	3.27	1.63	1.98	70.00	333.56	d = 1/2 * Moy A progr * t ²	25.00	1.98
11.3	120	33.33	2.95	1.47	1.98	85.56	214.44	d = 1/2 * Moy 1/2 A moy * t ²	30.56	1.98
15.5	140	38.89	2.51	1.25	1.32	151.67			36.11	1.32
MOY	77.14	21.43	3.57	1.79	2.78	138.61	< d totale		21.76	2.68

Mais aussi puisque les intervalles de vitesses sont importants, ce qui justifie bien la dénomination d'accélération moyenne, et ceci d'autant plus pour la première valeur pour laquelle l'intervalle est 3 fois supérieur au autres et qu'en raison de l'inertie de la voiture au démarrage l'évolution de l'accélération n'est pas bien prévisible et demande d'autant plus de divisions. Les valeurs demandées correspondent à celles correspondant à l'intitulé accélération progressive et développé dans l'ex 3.12. Le tableau complet est reporté à nouveau où l'on peut lire ces valeurs.

Ex 4.15 Une bille est reliée à un point fixe par un fil de 80 cm de long. Elle oscille dans un plan vertical. A un certain point de sa trajectoire, elle a une vitesse de 3,54 m/s. Deux centièmes de seconde plus tard, sa vitesse est abaissée à 3,46 m/s. Calculer l'accélération normale, l'accélération tangentielle, la norme du vecteur accélération et l'angle qu'ils forment avec la vitesse.

Dans ce chapitre, des développements mathématiques effectués à partir de la définition de l'accélération appliquée à un mouvement quelconque ont permis de définir deux modalités, l'accélération normale et tangentielle, dont chacune se constitue par une condition particulière ; l'accélération normale caractérise le taux de variation de la direction de la vitesse en fonction du temps et l'accélération tangentielle, le taux de la variation de sa norme. Le résultat du développement mathématique de l'accélération normale montre que celle-ci dépend de la norme de la vitesse instantanée et du rayon et que l'accélération tangentielle est simplement la dérivée scalaire de la norme de la vitesse, donc de la variation temporelle de la vitesse. Donc pour les calculer, dans le premier cas, on s'astreint à prendre pour vitesse instantanée la moyenne des vitesses, ceci avec d'autant moins d'erreur que l'intervalle de temps dans lequel l'accélération doit être calculé est très petit, hypothèse que l'on vérifie en comparant aux accélérations normales calculées pour les deux positions limites. A défaut de données d'équat. analytiques, pour l'accélér. tangentielle, on se contente d'une approximation de celle-ci comme le rapport de la différence de la norme de la vitesse au délai. Pareillement compte tenu de la différence de normes de vitesse et du délai très court, on estime que cette approximation est suffisamment bonne pour caractériser la valeur vraie de l'accélér. tangentielle moyenne centrée dans l'intervalle de temps.



Les normes obtenues, on se base sur les propriétés vectorielles applicables aux accél. pour déterminer les angles faits entre ces 2 accélérations représentées vectoriellement, ainsi que le vecteur résultant accélér. et son angle formé par rapport à la vitesse qui est par principe tangente à la trajectoire qui est ici circulaire.

a_{n1}	a_{n2}	$Ec.moy$	$Ec.moy.rel(\%)$	$\bar{a}_n = \frac{a_n^2}{R}$	a_t	$a =$	$\angle(V - a) =$
$\frac{v_1^2}{R}$	$\frac{v_2^2}{R}$	$\frac{1}{n} \sum a_i - \bar{a} $	$\frac{Ec.moy}{\bar{a}_n}$	$\frac{(v_1 + v_2)^2}{4R}$	$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v_2 - v_1}{dt}$	$\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$	$\arctan \frac{ a_n }{ a_t } + \frac{\pi}{2}$
15.66	14.96	0.35	2.3	15.31	-4	15.82	104.6°

Des calculs d'écarts montrent que l'on a une bonne approximation de l'acc. normale, comme on l'a appuyé par des arguments ci-haut. (2-3 %) . Pour l'at on ne peut que se contenter du même type d'arguments évoqués, en précisant ici que l'on a une variation relative de vitesse du même petit ordre, donc que l'on obtient une bonne approximation de la valeur centrale, mais ne connaissant pas la date de l'horaire au point central, on peut évaluer cette approximation en terme statistique chiffrée.

Ex 4.16 Un mobile a l'horaire, $\vec{r} = \vec{i} \cdot At + \vec{j} \cdot Bt^2$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, et A et B deux constantes. Calculer, en fonction du temps, l'accélération tangentielle, accélération normale, le rayon de courbure de la trajectoire, et l'angle formé par la vitesse et l'accélération. Application numérique : a =8 m/s, B= 1 m/s², t=3s.

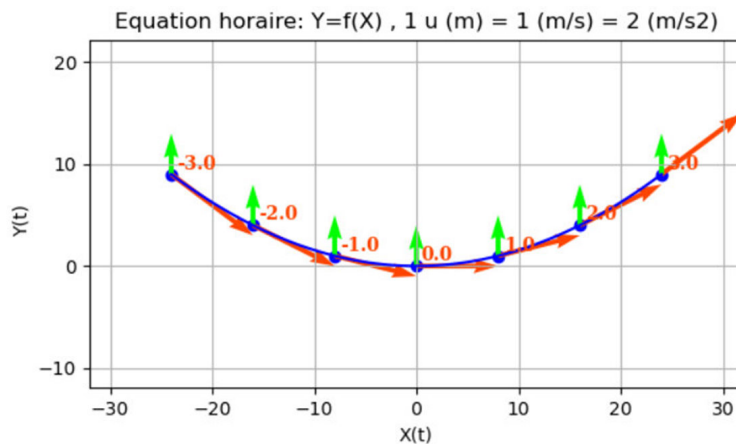
On dispose ici de l'équation horaire vectorielle paramétrique et analytique, en se basant sur les définitions de la vitesse et accélération, on peut déterminer les équations de la vitesse et de l'accélération, qui sont obtenues par 2 dérivations successives, comme dans les premiers exercices.

$$\vec{v} = A \vec{i} + 2Bt \vec{j} \quad \vec{a} = 0 \vec{i} + 2B \vec{j}$$

La position du mobile peut être pareillement représentée en coordonnées cartésiennes, puisque l'horaire est donné sous forme de vecteurs dans un repère orthonormé. Les propriétés mathématiques vectoriels étant également applicables aux vitesses et accélérations comme vecteurs, on obtient directement les vecteurs vitesses et accélérations en coordonnées cartésiennes. On peut introduire ces équations à variable temporelle dans un tableau et obtenir différentes valeurs de vitesse et accélération en posant par ex des dates discontinues de 1 s dans un intervalle [-3;3] (s). L'équation vectorielle paramétrique étant quadratique par rapport au temps, en éliminant la variable temporelle entre les deux équations horaires en abscisse et ordonnée, on obtient une variable Y dépendant du carré de X, donc la courbe évolutive du mobile est parabolique dans le repère orthonormée. On peut s'appuyer sur la définition de l'accélération tangentielle (dv/dt) pour calculer celle-ci aux points intérieurs; on divise la variation des normes de vitesses sur deux intervalles par le temps de deux intervalles et comparer avec une autre méthode qui donne également les résultats extrêmes. On constate déjà que par la double dérivation, les vecteurs accélérations ont pour abscisses nulles, et ordonnées constantes. Donc en chaque point discontinu l'accélération est dirigée verticalement, l'angle de celle-ci varie donc par rapport à la trajectoire donc avec la vitesse qui lui est tangente. Connaissant les coordonnées des vitesses, grâce aux formules de pythagore ou trigonométriques, on peut déterminer leurs angles relatives aux axes de coordonnées, puis par rapport aux vecteurs accélérations qui sont comme on l'a évoqué verticale, donc déphasées de 90° par rapport à l'abscisse. On détermine ainsi les angles que font des tangentes avec l'accélération et conséquemment les normes des accélérations tangentielles par projection ($a \cos \alpha$). On peut ainsi comparer avec les valeurs obtenues par la 1ère méthode. Les normes des accélérations résultantes et tangentielle étant connues, on peut déduire par Pythagore ou projection les accélérations normales. Celles-ci dépendant de la vitesse instantanée et du rayon de courbure, seule inconnue, on peut alors calculer la courbure.

On représente ci-dessous le tableau du tableur (Excel) et le graphique (Python) de l'horaire, avec la représentation des vecteurs vitesses et accélérations.

$t(s)$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x(m)$	-24	-16	-8	0	8	16	24
$y(m)$	9	4	1	0	1	4	9
$v_x(m/s)$	8	8	8	8	8	8	8
$v_y(m/s)$	-6	-4	-2	0	2	4	6
$a_x(m/s^2)$	0	0	0	0	0	0	0
$a_y(m/s^2)$	2	2	2	2	2	2	2



v	10	8.94	8.25	8	8.25	8.94	10
$at = dv/dt$		-0.875	-0.47	0	0.47	0.875	
$\beta = \pm \arccos(vx/v)$	-36.87	-26.51	-14.141	0	14.141	26.51	36.87
$\alpha = 90^\circ - \beta$	126.87	116.51	104.141	90	75.859	63.49	53.13
$a_t = a \cos \alpha$	-1.2	-0.893	-0.489	0	0.489	0.893	1.2
$a_n = \sqrt{(a^2 - a_t^2)}$	1.6	1.79	1.94	2	1.94	1.79	1.6
$a_n = a \cos(\alpha - 90^\circ)$	1.6	1.79	1.94	2	1.94	1.79	1.6
$\rho = v^2/a_n$	62.5	44.65	35.08	32	35.08	44.65	62.5

