

Matrices, quelques démonstrations

Matrice inverse (ordre $n < 4$); détermination empirique de la matrice inverse par résolution de systèmes d'équations linéaires

(Rappel) Produit de matrices. Le produit de 2 matrices ($A * B$) n'est possible que lorsque le nombre de colonnes de A (k) égale le nombre de lignes de B (k), puisque selon la définition, chaque élément de la matrice produit (C) est, tout en gardant la ième ligne de A et la jème colonne de A fixe, la somme des produits de la jème colonne de la ième ligne de A par le ième ligne de la jème colonne de B, avec dans l'ordre successif et conjointement incrémenté des jèmes colonnes de A et ièmes lignes de B en commençant par le premier élément jusqu'à la limite de la dimension respective, "ordre" de la colonne de A et ligne de B (k et k) et poursuivant ainsi de suite pour la composition des autres éléments successivement constitués, par ex. dans l' "ordre de la lecture", en effectuant la somme des produits des él. j+1ème colonne de B en commençant par la 1ère ligne et de ceux de la ième ligne de A fixe en commençant par la 1ère col., jusqu'à la fin de l'ordre de B (n) et poursuivant cet ordre de "lecture" pour i+1ème ligne de A avec la jème col. de A à nouveau partant de la 1ère colonne jusqu'à la fin de son ordre (n) et ainsi de suite jusqu'à m (ordre de lign. de A):

$$\begin{array}{c}
 \text{X}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{i/j} \quad 1 \quad \text{j(2)} \quad 3 \quad \dots \quad n \\
 \begin{pmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{1n} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & b_{13} \\
 b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn}
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{i/j} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad k \\
 \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{mk}
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1k}b_{k1} \\
 \\
 c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \dots + a_{3k}b_{k2} \\
 (c_{ij} = \sum_{u=1, v=1}^{k, k} a_{iu}b_{uj})
 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse, propriété déduite

Soit B tel que $A * B = B * A = I$. Alors par définition, B est l'inverse de A, noté : $B = A^{-1}$

(mais $A * B = B * A = I \iff B * A = A * B = I$. Alors par déf., A est aussi l'inverse de B : $A = B^{-1}$)

Si on applique ce que l'on a montré ci-haut d'après la définition de produit de 2 matrices au cas des matrices inverses, càd que le produit de 2 matrices existe seulement si le nombre de colonnes de la première matrice égale le nombre de ligne de la seconde (k), on doit nécessairement avoir :

$$\begin{cases}
 c_{m,n} = \sum \Pi a_{m,s} b_{t,n} \xrightarrow{\text{règle de } A*B} s = t = u \\
 c_{t,s} = \sum \Pi b_{t,n} a_{m,s} \xrightarrow{\text{règle de } A*B} m = n = p
 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
 C_{p,p} = A_{p,u} B_{u,p} \\
 C_{u,u} = B_{u,p} A_{p,u}
 \end{cases} \xrightarrow{B=A^{-1}} C_{p,p} = C_{u,u} \Rightarrow u = p$$

Les matrices doivent nécessairement avoir le même nombre de colonne et de lignes; être des matrices carrées: $A_{u,u}$ $B_{u,u}$

Matrice inverse, résolution

On a donc par exemple pour la matrice d'ordre 3X3:

$$\mathcal{B}(= \mathcal{A}^{-1})$$

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \mathcal{A} \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Calcul des éléments de la matrice inverse par mise en évidence et simple substitution;

$$\begin{array}{l} (1) \quad a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ (2) \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \\ (3) \quad a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0 \\ (4) \quad a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 1 \\ (5) \quad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 0 \\ (6) \quad a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0 \\ (7) \quad a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 1 \\ (8) \quad a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0 \\ (9) \quad a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad b_{11} = \frac{1 - a_{12}b_{21} - a_{13}b_{31}}{a_{11}} \\ (4) \quad b_{11} = \frac{1 - a_{22}b_{21} - a_{23}b_{31}}{a_{21}} \\ (7) \quad b_{11} = \frac{1 - a_{32}b_{21} - a_{33}b_{31}}{a_{31}} \\ (2) \quad b_{12} = -\frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}}{a_{11}} \\ (5) \quad b_{12} = -\frac{a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}}{a_{21}} \\ (8) \quad b_{12} = -\frac{a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}}{a_{31}} \\ (3) \quad b_{13} = -\frac{a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}}{a_{11}} \\ (6) \quad b_{13} = -\frac{a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}}{a_{21}} \\ (9) \quad b_{13} = -\frac{a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}}{a_{31}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (1, 7) \quad \frac{1 - a_{12}b_{21} - a_{13}b_{31}}{a_{11}} = \frac{1 - a_{32}b_{21} - a_{33}b_{31}}{a_{31}} \\ (4, 7) \quad \frac{1 - a_{22}b_{21} - a_{23}b_{31}}{a_{21}} = \frac{1 - a_{32}b_{21} - a_{33}b_{31}}{a_{31}} \\ (2, 8) \quad -\frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}}{a_{11}} = -\frac{a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}}{a_{31}} \\ (5, 8) \quad -\frac{a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}}{a_{21}} = -\frac{a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}}{a_{31}} \\ (3, 9) \quad -\frac{a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}}{a_{11}} = -\frac{a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}}{a_{31}} \\ (6, 9) \quad -\frac{a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}}{a_{21}} = -\frac{a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}}{a_{31}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (17) a_{31} - a_{12}b_{21}a_{31} - a_{13}b_{31}a_{31} = a_{11} - a_{32}b_{21}a_{11} - a_{33}b_{31}a_{11} \\ (47) a_{31} - a_{22}b_{21}a_{31} - a_{23}b_{31}a_{31} = a_{21} - a_{32}b_{21}a_{21} - a_{33}b_{31}a_{21} \\ (2, 8) \quad a_{12}b_{22}a_{31} + a_{13}b_{32}a_{31} = a_{32}b_{22}a_{11} + a_{33}b_{32}a_{11} \\ (5, 8) \quad a_{22}b_{22}a_{31} + a_{23}b_{32}a_{31} = a_{32}b_{22}a_{21} + a_{33}b_{32}a_{21} \\ (3, 9) \quad a_{12}b_{23}a_{31} + a_{13}b_{33}a_{31} = a_{32}b_{23}a_{11} + a_{33}b_{33}a_{11} \\ (6, 9) \quad a_{22}b_{23}a_{31} + a_{23}b_{33}a_{31} = a_{32}b_{23}a_{21} + a_{33}b_{33}a_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (17) (a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31})b_{21} + (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})b_{31} = a_{11} - a_{31} \\ (47) (a_{32}a_{21} - a_{22}a_{31})b_{21} + (a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31})b_{31} = a_{21} - a_{31} \\ (2, 8) \quad (a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11})b_{22} + (a_{13}a_{31} - a_{33}a_{11})b_{32} = 0 \\ (5, 8) \quad (a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21})b_{22} + (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})b_{32} = 0 \\ (3, 9) \quad (a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11})b_{23} + (a_{13}a_{31} - a_{33}a_{11})b_{33} = 0 \\ (6, 9) \quad (a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21})b_{23} + (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})b_{33} = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{A}_{23} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

$$\det(\mathcal{A}_{23}) = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} = \delta_{23}$$

Considérons les déterminants des mineurs de la matrice A (matrices d'ordre plus petit) , ceux-ci sont définis comme des matrices d'éléments non exclus d'une ligne et une colonne, dénommés m et indicés de ces lignes et colonnes respectives. On effectue alors des remplacement pour simplifier la résolution des éléments de B:

$$\begin{aligned}
(17) \quad & \delta_{23}b_{21} + \delta_{22}b_{31} = a_{11} - a_{31} \\
(47) \quad & \delta_{13}b_{21} + \delta_{12}b_{31} = a_{21} - a_{31} \\
(28) \quad & -\delta_{23}b_{22} - \delta_{22}b_{32} = 0 \\
(58) \quad & -\delta_{13}b_{22} - \delta_{12}b_{32} = 0 \\
(39) \quad & -\delta_{23}b_{23} - \delta_{22}b_{33} = 0 \\
(69) \quad & -\delta_{13}b_{23} - \delta_{12}b_{33} = 0
\end{aligned}
\Rightarrow \begin{cases} (17) - \frac{\delta_{23}}{\delta_{13}}(47) \quad \delta_{22}b_{31} - \frac{\delta_{23}\delta_{12}}{\delta_{13}}b_{31} = a_{11} - a_{31} - \frac{\delta_{23}}{\delta_{13}}(a_{21} - a_{31}) \\ \Rightarrow \quad b_{31} = \frac{\delta_{13}(a_{11}-a_{31}) - \delta_{23}(a_{21}-a_{31})}{\delta_{22}\delta_{13} - \delta_{23}\delta_{12}} \\ (258) \quad b_{32} = -\frac{\delta_{23}}{\delta_{22}}b_{22} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}b_{22} \\ (369) \quad b_{33} = -\frac{\delta_{23}}{\delta_{22}}b_{32} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}b_{32} \end{cases}$$

On détermine certaines variables en fonction des autres ou exploite le théorème de l'invariance du déterminant qui stipule que le remplacement de différentes lignes ou colonnes par des combinaisons linéaires de ces lignes ou colonnes ne modifie pas la valeur de la matrice pour éliminer des variables et réduire les équations à une inconnue. Développons le numérateur de b_{31} qui est alors résolu en remplaçant les deltas par les déterminants des mineurs. On peut simplifier deux termes opposés. On constate qu'un même élément a_{31} se trouve dans tous les termes et dans certains à double, si on met en évidence cet élément, on peut retrouver des déterminants de mineurs de la matrice A :

$$\begin{aligned}
& \delta_{13}(a_{11} - a_{31}) - \delta_{23}(a_{21} - a_{31}) = (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})(a_{11} - a_{31}) - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{21} - a_{31}) = \\
& = \underline{a_{11}a_{21}a_{32}} - a_{11}a_{31}a_{22} - a_{31}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{31}a_{22} - \underline{a_{21}a_{11}a_{32}} + a_{21}a_{31}a_{12} + a_{31}a_{11}a_{32} - a_{31}a_{31}a_{12} = \\
& = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})a_{31} - (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})a_{31}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \mathcal{N}(b_{31}) = a_{31}(-\delta_{13} + \delta_{23} - \delta_{33}) = \underline{-a_{31}(\delta_{33} + \delta_{13} - \delta_{23})}$$

$$\mathcal{N}(b_{31}) = -a_{31} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad \text{matrice des dét. des mineurs de A} \quad \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

On constate que le numérateur de b est un multiple négatif de l'élément correspondant de a (de même "coordonnées") et de la somme des différents déterminants (dét.) de mineurs positifs ou négatifs constitués par le nombre de combinaisons non répétitives de 3 lignes différentes (ordre de ligne de A) dans deux lignes (ordre inférieur) dont les éléments de la dernière colonne sont exclus. En s'inspirant de la méthode employée dans la règle de Sarrus pour le calcul de dét. d'ordre 3, on ajoute une ligne au-dessous et l'on constate alors que cette somme de dét. peut être modélisée par les mineurs successifs dont le signe négatif est attribué au mineur formé par les éléments de la dernière ligne de la matrice originelle et de la ligne ajoutée. On constate également que le dénominateur est un dét. négatif d'un mineur de la matrice formée des dét. des mineurs comme éléments. On peut représenter cette matrice et constater que le dét. du mineur du dénominateur est celui des éléments de cette matrice tel que le mineur est composé des éléments dont les colonnes et lignes exclues correspondent aux indices de ligne et colonne de l'élément de b dont on cherche la solution.

$$\mathcal{D}(b_{31}) = \delta_{22}\delta_{13} - \delta_{23}\delta_{12} = -(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13}) = - \begin{vmatrix} \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{22} & \delta_{23} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \delta_{11} & \begin{vmatrix} \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{22} & \delta_{23} \end{vmatrix} \\ \delta_{21} & \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{On peut développer le dénominateur et extraire identiquement l'élément } a \text{ de mêmes indices que celui de } B (= A^{-1}) \\
& (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) = \underline{a_{11}a_{33}a_{21}a_{32}} - a_{11}a_{33}a_{31}a_{22} - \\
& a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{13}a_{31}a_{22} - \underline{a_{11}a_{32}a_{21}a_{33}} + a_{11}a_{32}a_{31}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{21}a_{33} - a_{31}a_{12}a_{31}a_{23}
\end{aligned}$$

Représentons les produits des éléments précédés de leurs signe par des matrices distinctes des seuls éléments de chaque produit dans leur positions originelles, on constate alors que chaque ligne ou colonne ne contient qu'un seul élément;

Le nombre de ces produits est le nombre d'arrangements de triolets tel que tous les éléments soient différents, c'est donc le nombre d'arrangements de 3 éléments avec 3 éléments ou toutes les permutations possibles réalisées avec ces 3 éléments. $A_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = P_3$

$$= -a_{31} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right)$$

La somme des produits des triolets d'éléments n'est autre que le déterminant de la matrice A;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = d(A)$$

$$\text{Pour finir: } b_{31} = \frac{-a_{31}(\delta_{33} + \delta_{13} - \delta_{23})}{-a_{31}\det(\mathcal{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

On a vu que les déterminants au numérateur sont ceux des mineurs de sous-matrice de A formées d'éléments n'appartenant pas à la dernière colonne. La formalisation de ces sous-matrices (3-1)(3-1) par suppression de la colonne 3 correspondant à l'élément b d'indice 31 (colonne 1) n'est pas évidente, à première vue on ne trouve pas immédiatement de lien, en effet les sous-matrices sont formées des éléments des colonnes 1 et 2 et l'indice de b comporte la colonne 1. Il faudrait caractériser les autres éléments et en tirer une formalisation, mais on peut s'attendre à priori que le problème sera équivalent. On peut par contre considérer le transposé de la matrice de A comme support de formalisation. En effet, la somme des déterminants des mineurs est alors composé des déterminant des mineurs formés sur les deux premières lignes, on peut proposer que cette somme est formé de la somme des déterminants des mineurs alternativement formés par colonne successive dont sont exclus les éléments de même colonne et même ligne (ici 3, constante), puisque l'élément recherché est b₃₁, d'indice de ligne 3. On propose une formalisation faite de la somme des éléments de la ligne correspondante (3) d'une matrice U dont les éléments sont les déterminants des mineurs du transposé de A comme indiqué; c'est à dire formé par les éléments dont sont exclus les lignes et les colonnes des indices de μ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\det(\mathcal{A})} = \frac{(-1)^{3+1}\mu_{31} + (-1)^{3+2}\mu_{32} + (-1)^{3+3}\mu_{33}}{\det(\mathcal{A})}$$

La généralisation attendue serait ?

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathcal{A})} \times \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \dots & \dots & a_{ij}^{-1} = \text{n'importe quoi} \sum_{j,i=1}^n (-1)^{j+i} \prod_{\substack{l=j \\ k=1, k \neq i}}^{n-1} a_{jk}^{n-1} & \dots \\ a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Avant de proposer une généralisation en employant le transposé de A, appliquons une formalisation en se basant sur le numérateur de la solution de l'élément b31 trouvé plus haut avec i et j pour la ligne et la colonne respective de cet élément et les correspondances proposées entre les déterminants des mineurs de A formés des éléments des deux premières colonnes pour l'élément correspondant de b31 de colonne 1 , on aurait alors ;

$$b_{ij} = a_{(i-2,j)}a_{(i-1,j+1)} - a_{(i-1,j)}a_{(i-2,j+1)} + a_{(i-1,j)}a_{(i,j+1)} - a_{(i,j)}a_{(i-1,j+1)} - a_{(i,j)}a_{(i-2,j+1)} + a_{(i-2,j)}a_{(i,j+1)}$$

Les colonnes des aij sont soit la même colonne de j (1) ou soit la suivante j+1 (2). Pour chaque couple (j,j+1), on a une permutation (i-k-1)(i-k) avec k allant de 0 à 1 pour les 4 premiers produits et une permutation (i-k-1-1)(i-k) pour k = 0 pour les 2 derniers. On peut proposer que lorsque la somme des ij des deux facteurs de produits sont impairs (a31 a12 et a11 a32; 7), il existe un m tel qu'il est égale 1 et les indices sont soustrait de cette valeur , sinon m vaut 0. Donc la permutation serait (i-k-1-m)(i-k) avec m= 0 ou 1 selon cette somme de produit. ..ENCORE N'IMPORTE QUOI!?

caractérisons d'abord un autre élément de la matrice inverse

A SUIVRE
