

Température de l'aileron avec condition adiabatique à l'extrémité TL = T_{infini}

Rappel:

$$\dot{Q}cd_x = \dot{Q}cd_{x+dx} + \dot{Q}_{cv} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} + hp \Delta x (T - T_\infty) \quad \boxed{\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = hp \Delta x (T - T_\infty)}$$

$$\text{th. de Lagrange} \Rightarrow \lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x \approx \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \stackrel{dx \rightarrow 0}{=} \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \Rightarrow \boxed{\lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = hp(T - T_\infty)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0}$$

$$\theta = T - T_\infty \quad m^2 = \frac{hp}{\lambda S} \Rightarrow \text{sol. générale} \Rightarrow \boxed{\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}}$$

$$\begin{aligned} \theta(L) &= C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} \\ \theta(0) &= \theta_0 = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

La condition adiabatique à l'extrémité implique (TL proche de T inf. (peu réaliste), SL très petite) :



$$\dot{Q}cd_L = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} \stackrel{T_L \approx T_\infty}{S_L \ll S_T, \dot{Q} \approx 0} \Rightarrow 0 = \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} \Rightarrow 0 = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} \Rightarrow C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} (1) C_1 + C_2 &= \theta(0) = \theta_0 \\ (2) C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (1) e^{-mL} + (2) &\Rightarrow \underline{C_1} = \frac{\theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \frac{\theta_0}{1 + e^{2mL}} \\ \underline{C_2} &= \frac{\theta_0 e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} = \frac{\theta_0}{1 + e^{-2mL}} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_0}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{\theta_0}{1 + e^{-2mL}} e^{-mx} \Rightarrow \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} = \frac{e^{mx} + e^{mx-2mL} + e^{-mx} + e^{-mx+2mL}}{1 + e^{2mL} + e^{-2mL} + e^{2mL}e^{-2mL}}$$

$$\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{e^{mx} + e^{-mx} + e^{mx-2mL} + e^{-mx+2mL}}{2 + e^{2mL} + e^{-2mL}} = \frac{2 \cosh(mx) + 2 \cosh(mx - 2mL)}{2 + \cosh^2(mL) + \sinh^2(mL) + \cosh^2(-mL) + \sinh^2(-mL)}$$

$$= \frac{2 \cosh(mx) + 2 \cosh(mx) \cosh(2mL) - 2 \sinh(mx) \sinh(2mL)}{2 + 2 \sinh^2(mL) + 2 \cosh^2(mL)}$$

$$= \frac{\cosh(mx) + \cosh(mx) \cosh(2mL) - \sinh(mx) \sinh(2mL)}{1 + \sinh^2(mL) + \cosh^2(mL)}$$

$$= \frac{\cosh(mx) + \cosh(mx)(\sinh^2(mL) + \cosh^2(mL)) - 2 \sinh(mx) \sinh(mL) \cosh(mL)}{2 \cosh^2(mL)}$$

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y) \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ \sinh(2x) &= 2 \sinh(x) \cosh(x) \\ \sinh(-x) &= -\sinh(x) \quad \cosh(-x) = \cosh(x) \\ \cosh^2(x) &= 1 + \sinh^2(x) \\ \cosh(x) \pm \sinh(x) &= e^{\pm x} \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \quad \sinh'(x) = \cosh(x) \end{aligned}$$

$$\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh(mx)(1 + \sinh^2(mL) + \cosh^2(mL)) - 2 \sinh(mx) \sinh(mL) \cosh(mL)}{2 \cosh^2(mL)}$$

$$\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{2 \cosh(mx) \cosh^2(mL) - 2 \sinh(mx) \sinh(mL) \cosh(mL)}{2 \cosh^2(mL)} = \frac{\cosh(mx) \cosh(mL) - \sinh(mx) \sinh(mL)}{\cosh(mL)}$$

$$\boxed{\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh(mx - mL)}{\cosh(mL)}}$$

Le taux de transfert à la base de l'aileron selon la loi de Fourier devient alors:

$$\dot{Q}_{\text{adiab. ailer.}} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S \frac{(T_0 - T_\infty) d(\cosh(mx - mL))}{\cosh(mL) dx} =$$

$$-\lambda S \frac{(T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} (\cosh'(mx) \cosh(mL) - \sinh(mL) \sinh'(mx))_{x=0}$$

$$= -\lambda m S \frac{(T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} (\sinh(mx) \cosh(mL) - \sinh(mL) \cosh(mx))_{x=0}$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} \quad \sinh(0)=0 \quad \cosh(0)=1 \quad -\sqrt{hp\lambda S} \quad *$$

$$\boxed{\dot{Q}_{\text{adiab. ailer.}} = \sqrt{hp\lambda S} \tanh(mL) (T_0 - T_\infty)}$$

Température de l'extrémité de l'aileron très long avec condition non adiabatique à l'extrémité, $T_L \neq T_a$

considérons l'éq. gén. établie plus haut. $\theta(L) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ pour $x \rightarrow \infty$ $e^{mx} \rightarrow \infty$, solution absurde donc les conditions

$$\text{limites entraînent : } C_1 = 0 \quad \theta_0 = \theta(0) = 0 + C_2 e^0 \Rightarrow \theta(x) = \theta_0 e^{-mx} \quad m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} \quad \theta_x = T_x - T_\infty \Rightarrow \boxed{\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-x\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}}}$$

Le taux de transfert thermique de l'aileron très long peut alors être défini par la loi de Fourier:

$$\dot{Q}_{\text{aileron très long}} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad T_x = T_\infty + \theta_0 e^{-x\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}} \quad -\lambda S * -\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} \theta_0 e^0 = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty) \quad \boxed{\dot{Q}_{\text{aileron très long}} = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty)}$$

Remarque, on peut également retrouver cette équation en posant dans l'équation en condition adiabatique trouvé si haut que lorsque L devient très grand les exponentiels négatifs s'éliminent et on retrouve la même équation;

$$\dot{Q}_{\text{adiab. ailer.}} = -\sqrt{hp\lambda S} \tanh(mL) (T_0 - T_\infty) \quad \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\text{condition non adiab. ail. t. long}} \sqrt{hp\lambda S} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{e^L - e^{-L}}{e^L + e^{-L}} (T_0 - T_\infty) = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty)$$

Remarque, on peut également retrouver cette équation par intégration du transfert thermique par convection :

$$\dot{Q}_{\text{aileron conv.}} = \int_{S_{\text{ail.}}} h(T_x - T_\infty) dS = hp(T_0 - T_\infty) e^{-x\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}} dx = -hp(T_0 - T_\infty) \left. \frac{1}{\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}} e^{-x\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}} \right|_0^\infty = -hp(T_0 - T_\infty) \frac{-1 * \sqrt{\lambda S}}{\sqrt{hp}} = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty)$$

$$\boxed{\dot{Q}_{\text{aileron conv.}} = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty)}$$

Température de l'extrémité de l'aileron, généralisation de l'aileron infiniment long, $T_L \neq T_\infty$

On reprend les éq. posées pour les conditions adiabatiques avec ici, la température de l'extrémité quelconque sans dérivation de l'équation;

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) C_1 + C_2 = \theta(0) = \theta_0 \\ (2) C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = \theta_L \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_0 e^{-mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad C_2 = \theta_0 - \frac{\theta_0 e^{-mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}} = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \Rightarrow$$

$$\theta_x = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{mx} + \frac{\theta_0 e^{mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{-mx} = \frac{\theta_0 (e^{mL-mx} - e^{mx-mL}) + \theta_L (e^{mx} - e^{-mx})}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

$$\theta_x = \frac{\theta_0 (e^{mL-mx} - e^{-(mL-mx)}) + \theta_L 2 \sinh(mx)}{2 \sinh(mL)} = \frac{\theta_0 2 \sinh(mL - mx) + \theta_L 2 \sinh(mx)}{2 \sinh(mL)} \Rightarrow$$

$$\frac{\theta_x}{\theta_0} = \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\sinh(mL - mx) + \frac{\theta_L}{\theta_0} \sinh(mx)}{\sinh(mL)} \quad \boxed{\frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\sinh(mL - mx) + \frac{T_L - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \sinh(mx)}{\sinh(mL)}}$$

Le taux de transfert thermique de l'aileron à température spécifique peut alors être défini par la loi de Fourier:

$$\dot{Q}_{\text{aileron à T spéc.}} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \frac{-\lambda S}{\sinh(mL)} (T_0 - T_\infty) \left(\frac{\partial \sinh(mL - mx)}{\partial x} + \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{\partial \sinh(mx)}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$= \frac{-\lambda m S}{\sinh(mL)} (T_0 - T_\infty) \left(\sinh(mL) \sinh(mx) - \cosh(mL) \cosh(mx) + \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \cosh(mx) \right)_{x=0} \quad \begin{array}{l} \sinh(0)=0 \quad \cosh(0)=1 \\ m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S}} \end{array}$$

$$\dot{Q}_{\text{aileron à T spéc.}} = -\sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty) \frac{-\cosh(mL) + \frac{T_L - T_\infty}{T_0 - T_\infty}}{\sinh(mL)} \Rightarrow \boxed{\dot{Q}_{\text{aileron à T spéc.}} = \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh(mL) - \frac{T_L - T_\infty}{T_0 - T_\infty}}{\sinh(mL)}}$$

Remarque, pour L tendant vers l'infini, donc pour la condition de l'aileron très long on retrouve : $\theta_x = \theta(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \rightarrow \infty$

$$\dot{Q}_{\text{aileron très long}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty) \left[\frac{e^{mL} + e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} - \frac{T_L - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{1}{e^{mL} - e^{-mL}} \right] \Rightarrow \dot{Q}_{\text{aileron à T spéc.}} = -\sqrt{hp\lambda S} (T_0 - T_\infty)$$

$$\theta_x \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \theta_0 \frac{e^{mL-mx} - e^{-mL+mx}}{2} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + \frac{\theta_L}{\theta_0} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \theta_0 e^{-mx} \frac{\theta_L}{\theta_0} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2e^{mL}} = \theta_0 e^{-mx}$$

$$\theta_x \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \theta_0 \left(\frac{e^{mL-mx} - e^{-mL+mx}}{2} + \frac{\theta_L}{\theta_0} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right) = \theta_0 e^{-mx} + 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\theta_x}{\theta_0} = \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-x\sqrt{\frac{hp}{\lambda S}}}}$$