

Mathematical statsitics, Wackerly, Mendenhall, Schaeffer (théorie (Angl.) v. visionneuse)

Traduction google E-F des énoncés , corrections sommaires éventuels. Développements des résolutions, Master Sc ,non mathématicien, reprends les statistiques dans un but d'approfondissement de connaissance dans le domaine.

méthodologie : J'ai tenté de résoudre les problèmes en faisant abstraction de connaissances déjà acquises en statistique , et en suivant les apports théoriques successifs du manuel dans l'ordre des chapitres.

2.1 Suppose a family contains two children of different ages, and we are interested in the gender of these children. Let F denote that a child is female and M that the child is male and let a pair such as FM denote that the older child is female and the younger is male. There are four points in the set S of possible observations: $S = \{ FF, FM, MF, MM \}$. Let A denote the subset of possibilities containing no males; B, the subset containing two males; and C, the subset containing at least one male. List the elements of A, B, C, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$, and $C \cap B$.

2.1 Supposons qu'une famille comprenne deux enfants d'âges différents et que l'on s'intéresse à leur sexe. Soit F le sexe de l'enfant et M le sexe de l'enfant . Une paire comme FM indique que l'enfant le plus âgé est une fille et le plus jeune un garçon. L'ensemble S des observations possibles comporte quatre points : $S = \{ FF, FM, MF, MM \}$. Soit A le sous-ensemble des possibilités ne contenant aucun homme; B, le sous-ensemble contenant deux hommes; et C, le sous-ensemble contenant au moins un homme. Énumérez les éléments de A, B, C, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$ et $C \cap B$.

Solution

$A_{0\sigma}$	$B_{2\sigma}$	$C_{\geq 1\sigma}$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \cap C$	$A \cup C$	$B \cap C$	$B \cup C$	$C \cap B$
{FF}	{MM}	{MF}, {MM}	$\emptyset$	{FF}, {MM}	$\emptyset$	{FF}, {MF}, {MM}	B	C	B

2.2 Suppose that A and B are two events. Write expressions involving unions, intersections, and complements that describe the following: a Both events occur. b At least one occurs. c Neither occurs. d Exactly one occurs.

2.2 Supposons que A et B soient deux événements. Écrivez des expressions impliquant des unions, des intersections et des compléments qui décrivent ce qui suit : a Les deux événements se produisent. b Au moins un cas se produit. c Aucun des deux ne se produit. d. Un seul cas se produit.

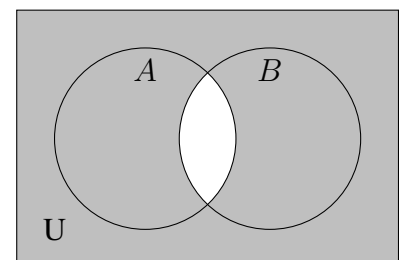
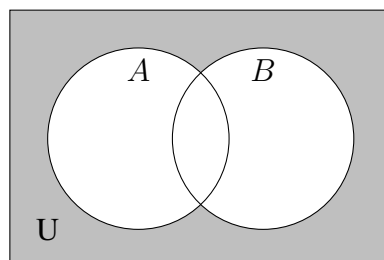
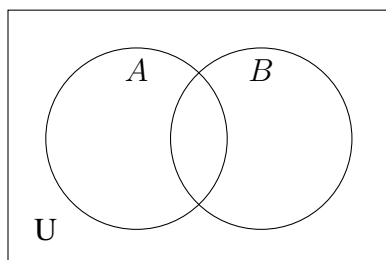
Solution

Les 2 événements se produisent	Au moins 1 cas se produit	Aucun des 2 ne se produit	1 seul cas se produit
$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$

2.3 Draw Venn diagrams to verify DeMorgan's laws. That is, for any two sets A and B, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ and $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2.3 Tracez des diagrammes de Venn pour vérifier les lois de Morgan. Autrement dit, pour deux ensembles quelconques A et B, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

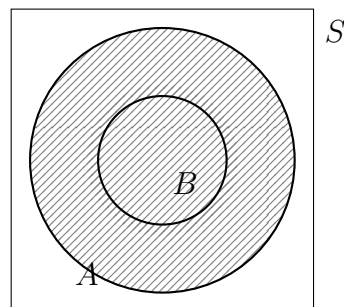
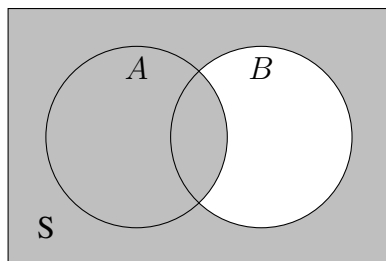
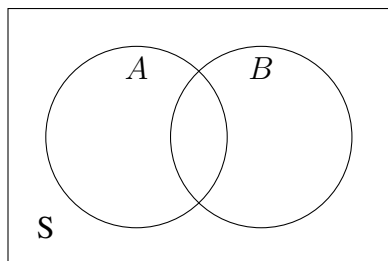
Solution



2.4 If A and B are two sets, draw Venn diagrams to verify the following:
a/ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
b/ If $B \subset A$ then $A = B \cup (A \cap \bar{B})$.

2.4 Si A et B sont deux ensembles, dessinez des diagrammes de Venn pour vérifier ce qui suit :
a/ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
b/ Si $B \subset A$ alors $A = B \cup (A \cap \bar{B})$.

Solution



2.5 Se référer à l'exercice 2.4. Utiliser les identités $A = A \cap S$ et $S = B \cup \bar{B}$ et une loi de distributivité pour prouver que :

a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

b Si $B \subset A$ alors $A = B \cup (A \cap \bar{B})$.

c Montrer de plus que $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont mutuellement exclusifs et donc que A est l'union de deux ensembles mutuellement exclusifs, $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$

d Montrez également que B et $(A \cap \bar{B})$ sont mutuellement exclusifs et que si $B \subset A$, A est l'union de deux ensembles mutuellement exclusifs, B et $(A \cap \bar{B})$.

Solution

a1 $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap ((B \cup \bar{B}) \cap S) = A \cap (S \cap S) = A \cap S = A$

a2 $B \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \underbrace{(A \cap B) \cup A}_{(A \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = A} \cap ((A \cap B) \cup \bar{B}) = (A \cap ((A \cup \bar{B}) \cap \underbrace{(B \cup \bar{B})}_S))$
 $= ((A \cap A) \cup (A \cap \bar{B})) \cap S = \underbrace{(A \cup (A \cap \bar{B}))}_{\subset A} \cap S = A \cap S = A$

b $B \cup (A \cap \bar{B}) = \underbrace{(B \cup A)}_{=A(B \subset A)} \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$

c $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Ces deux ensembles sont exclusifs.

d $B \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Ces deux ensembles sont exclusifs

d' $B \cup (A \cap \bar{B}) = (B \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) \stackrel{\text{si } B \subset A}{=} A \cap S = A \Rightarrow$ A est l'union de 2 ensembles exclusifs s'il contient B

2.6 From a survey of 60 students attending a university, it was found that 9 were living off campus, 36 were undergraduates, and 3 were undergraduates living off campus. Find the number of these students who were a undergraduates, were living off campus, or both. b undergraduates living on campus. c graduate students living on campus.

Solution Caractérisons les sous-ensembles comportant l'ensemble des étudiants, et puisqu'ils comptent tous des étudiants de l'université, ils sont inclus dans l'ensemble de l'université U. Représentons un diagramme de Venn avec les intersections des 4 ensembles. On obtient directement le contenu des ensembles et intersections par différence. On a:

HC, ensemble de 9 étudiants hors campus

PC, ensemble de 36 étudiants de licence, du premier cycle

IC, l'ensemble des étudiants du campus, L étudiants diplômés et,

PCHC, le sous-ensemble intersection de PC et de HC comtant 3 étudiants.

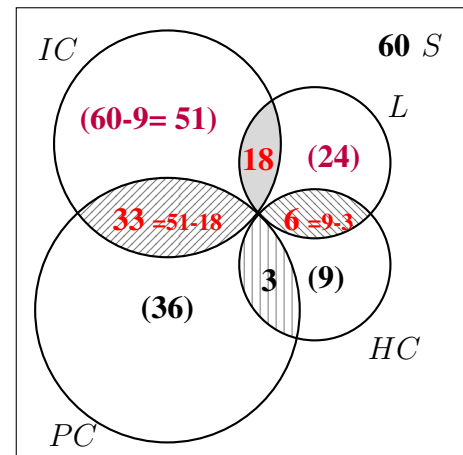
On obtient d'abord par des opérateurs d'addition, soustraction ou complémentarité les contenus de : $L = S - PC = 24$, $IC = S - HC = 51$, $LHC = HC - PCHC = 6$, $LIC = L - LHC = 18$ et $PCIC = IC - LIC = 33$. Donc;

a) $PCHC = 3$, $PCIC = 33$, et on a bien $PCHC + PCIC = PC = 36$

b) $PCIC = 33$

c) $LIC = 18$

2.6 D'après une enquête menée auprès de 60 étudiants d'une université, 9 vivaient hors campus, 36 étaient du premier cycle et 3 étaient du premier cycle vivant hors campus. Déterminez le nombre de ces étudiants qui étaient a) des étudiants de premier cycle qui vivaient hors campus, ou les deux. b) des étudiants de premier cycle qui vivaient sur le campus. c) des étudiants diplômés qui vivaient sur le campus.



2.7 A group of five applicants for a pair of identical jobs consists of three men and two women. The employer is to select two of the five applicants for the jobs. Let S denote the set of all possible outcomes for the employer's selection. Let A denote the subset of outcomes corresponding to the selection of two men and B the subset corresponding to the selection of at least one woman. List the outcomes in A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, and $A \cap \bar{B}$. (Denote the different men and women by M1, M2, M3 and W1, W2, respectively.)

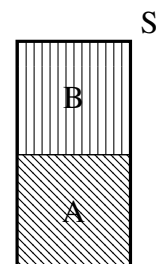
Solution Posons l'ensemble des sous-ensembles possibles, on distingue les éléments par leur sexe (H,F) et leur individualité (1,2,..). On peut ainsi opérer des opérations booléennes et en calculer les dimensions (Chap.2.6). On a:

$$S = \{\{h1, h2\}\{h1, h3\}\{h2, h3\}\{h1, f1\}\{h1, f2\}\{h2, f1\}\{h2, f2\}\{h3, f1\}\{h3, f2\}\{f1, f2\}\} \quad D(S) = C_5^2 = 10$$

$$A = \{\{h1, h2\}\{h1, h3\}\{h2, h3\}\} \quad D(A) = C_3^2 = 3$$

$$B = \{\{h1, f1\}\{h1, f2\}\{h2, f1\}\{h2, f2\}\{h3, f1\}\{h3, f2\}\{f1, f2\}\} \quad D(B) = C_5^2 - C_3^2 = 7$$

$$A \cup B = S \quad A \cap B = \emptyset \quad A \cap \bar{B} \stackrel{A \cap B = \emptyset \text{ et } (A \cup B) = S}{=} A \quad A \cap A = A$$



2.8 Suppose two dice are tossed and the numbers on the upper faces are observed. Let S denote the set of all possible pairs that can be observed. [These pairs can be listed, for example, by letting (2, 3) denote that a 2 was observed on the first die and a 3 on the second.] a Define the following subsets of S: A: The number on the second die is even. B: The sum of the two numbers is even. C: At least one number in the pair is odd. b List the points in A, $\bar{C}$, $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$, and $\bar{A} \cap C$

Solution Posons l'ensemble des sous-ensembles possibles de paires de nombres, et calculons en la dimension (Chap.2.6).

$$S = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}, \{5, 4\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{6, 2\}, \{6, 3\}, \{6, 4\}, \{6, 5\}, \{6, 6\}\} D(A) = C_6^1 * C_6^1 = 36$$

On série la liste en maintenant le premier chiffre du premier dé fixe à la valeur la plus petite composé avec le second chiffre à la valeur la plus petite et celui-ci croissant dans l'ordre des sous-ensembles successifs et en recommençant ainsi par incrémentation du chiffre du premier dé de la même manière jusqu'au dernier élément composé de deux 6.

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* | i, j \leq 6 \text{ et } \frac{j}{2} \in \mathbb{N}\} = \{(i, j) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} | j = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad D(A) = 6 \binom{6}{2} = 18 = C_6^1 * C_3^1$$

a) On détermine ces sous-ensembles et leur dimensions de la manière suivante; le nombre de paires des chiffres du deuxième dé dans l'ensemble des 6 premiers éléments est 3, puisque ces chiffres se suivent et que les pairs et impairs sont alternés dans la série des nombres croissants, donc les 6 séries identiques de chiffres du deuxième dés auront également une moitié de nombres pairs. Sans même le calcul combinatoire, on a nécessairement la moitié des sous-ensembles possibles dans cet ensemble. Ces sous-ens. sont des ensembles i, j tel que j est divisible par 2.

$$B = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* | i, j \leq 6 \text{ et } \frac{i+j}{2} \in \mathbb{N}\} \quad D(A) = \frac{C_6^1 * C_6^1}{2} = 18$$

b) On a identiquement selon notre procédé d'ordination la somme des paires de sous-ensembles sériés dans l'ordre croissant d'une incrémentation selon la variation croissante du second dé en premier, donc pour la même raison d'alternance de pairs et impairs on aura également une dimension égale à la moitié de celle de S. La représentation algébrique est conditionnée par la parité de la somme des i, j éléments naturels non nuls plus petits ou égaux 6.

$$\begin{cases} C = \{(i, j) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} | (i = 2k_1 - 1) \text{ ou } (j = 2k_2 - 1) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*\} \\ \bar{C} = \{(i, j) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} | i = 2k_1 \text{ et } j = 2k_2\} \end{cases} \quad D(C) = D(S) - D(\bar{C}) = 36 - (\frac{36}{2} - \frac{1}{2} * \frac{36}{2}) = 27$$

c) La représentation algébrique peut se faire directement par la méthode directe de disjonction inclusive d'imparité des deux dés ou par la complémentarité de l'ensemble constitués de couples de dés conjointement pairs. Cette dernière méthode permet une stratégie de calcul de la dimension de l'ensemble sans énumération des éléments; les couples commençant par un nombre impair sont exclus de l'ensemble complémentaire, et ceux commençant pas un nombre pair ont 3/6 couples de nombres de second dé pair, donc la dimension de l'ensemble est aisément formulé.

$$\begin{aligned} A_{j=2k} &= \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \dots\} \quad B_{i+j=2k} = \{\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \dots\} \\ C_{i=2k+1 \vee j=2k+1} &= \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \dots\} \\ \bar{C}_{i=2k \wedge j=2k} &= (A \cap B)_{j=2k \wedge i+j=2k} = \{\{2, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 2\}, \{4, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 2\}, \{6, 4\}, \{6, 6\}\}, \quad D(\bar{C}) = 9 \\ (A \cap \bar{B})_{j=2k \wedge i+j=2k+1} &= \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 6\}\}, \quad D((A \cap \bar{B})) = 9 \\ (\bar{A} \cup B)_{j=2k \vee i+i=2k} &= \{\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 1\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 1\}, \{5, 3\}, \{5, 5\}, \{6, 1\}, \{6, 2\}, \{6, 3\}, \{6, 4\}, \{6, 5\}\}, \quad D((\bar{A} \cup B)) = 26 \\ (\bar{A} \cap C)_{j=2k+1 \wedge (\vee i, j=2k+1)} &= \{\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 1\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 1\}, \{5, 3\}, \{6, 1\}, \{6, 3\}, \{6, 5\}\} \quad D = 11 \end{aligned}$$

2.9 Every person's blood type is A, B, AB, or O. In addition, each individual either has the Rhesus (Rh) factor (+) or does not (-). A medical technician records a person's blood type and Rh factor. List the sample space for this experiment.

2.9 Le groupe sanguin de chaque personne est A, B, AB ou O. De plus, chaque individu possède le facteur Rhésus (Rh) (+) ou ne le possède pas (-). Un technicien médical enregistre le groupe sanguin et le facteur Rh d'une personne. Déterminez l'espace échantillonnal pour cette expérience.

Solution L'espace d'échantillonnage est l'ensemble des sous-ensembles possibles de couples d'éléments de typologie ABO du groupe sanguin associés avec les éléments de la typologie Rhésus (+/-), La relation permettant de constituer cette liste peut être formalisé; ABO X Rh, donc : $S = \{\{\{A^+\}, \{A^-\}, \{B^+\}, \{B^-\}, \{AB^+\}, \{AB^-\}, \{O^+\}, \{O^-\}\}$

2.10 The proportions of blood phenotypes, A, B, AB, and O, in the population of all Caucasians in the United States are approximately .41, .10, .04, and .45, respectively. A single Caucasian is chosen at random from the population. a List the sample space for this experiment. b Make use of the information given above to assign probabilities to each of the simple events. c What is the probability that the person chosen at random has either type A or type AB blood?

2.10 Les proportions des phénotypes sanguins A, B, AB et O dans la population caucasienne des États-Unis sont respectivement d'environ 0,41, 0,10, 0,04 et 0,45. Un individu caucasien est choisi au hasard dans cette population. a) Déterminez l'espace échantillonnage de cette expérience. b) Utilisez les informations ci-dessus pour attribuer une probabilité à chaque événement simple. c) Quelle est la probabilité que la personne choisie au hasard soit de type sanguin A ou de type AB ?

a) L'espace échantillonnage est constitué de l'ensemble des événements simples que sont les phénotypes possibles de typologie ABO du groupe sanguin. $S = \{\{\{A\}, \{B\}, \{AB\}, \{O\}\} E_1 = \{A\} E_2 = \{B\} E_3 = \{AB\} E_4 = \{O\}$

b) La probabilité du choix de l'événement simple prélevé par échantillonnage est directement donnée par les proportions relatives dans la population. $P(E_i) = f(E_i) \Rightarrow P(E_1) = 0.41 P(E_2) = 0.1 P(E_3) = 0.04 P(E_4) = 0.45$

c) La probabilité de choisir 1 personne de type A ou AB est celle de la réunion de ces 2 éléments, donc la somme des probabilités associées à l'événement A et B. Pour symboliser la réunion des 2 événements, on emploie l'opération de disjonction exclusive (on ne peut pas être à la fois A et AB*). $P_{E_1 \vee E_3} = P(E_1 \cup E_3) = f(E_1) + f(E_3) = .45$

* (Rappel: L' $\mathcal{E}A$ a un glycoprotéine "marqueur" de A et produit des anti-B dans le serum, ne peut être receveur que des $\mathcal{E}O$

2.11 A sample space consists of five simple events, E1, E2, E3, E4, and E5. a If $P(E1) = P(E2) = 0.15$, $P(E3) = 0.4$, and $P(E4) = 2P(E5)$, find the probabilities of E4 and E5. b If $P(E1) = 3P(E2) = 0.3$, find the probabilities of the remaining simple events if you know that the remaining simple events are equally probable.

2.11 Un espace d'échantillonnage est constitué de cinq événements simples, E1, E2, E3, E4 et E5. a) Si $P(E1) = P(E2) = 0,15$, $P(E3) = 0,4$ et $P(E4) = 2 P(E5)$, trouvez les probabilités de E4 et E5 b) Si $P(E1) = 3P(E2) = 0,3$, trouvez les probabilités des événements simples restants, si vous savez que les autres événements simples sont équiprob.

a) La somme des probabilité de tous les événements étant égale à la probabilité de l'espace d'échantillonnage, donc 1, on détermine ces deux probabilité par soustraction et substitution des inconnus dans cette équation : $1 \stackrel{=P(S)}{=} P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) = 0.3 + 0.4 + 2P(E_5) + P(E_5) \Rightarrow P(E_5) = 0.1 \quad P(E_4) = 0.2$

b) On procède de la même manière :

$$1 = 3P(E_2) + P(E_2) + 3P(E_{i=4,5,6}) \Rightarrow 3P(E_{i=4,5,6}) = 1 - 0.3 + 0.3/3 = 0.6 \Rightarrow P(E_{i=3 \vee 4 \vee 5}) = 0.2$$

$$P(E_1) = 0.3 \quad P(E_2) = 0.1 \quad P(E_{i=3 \vee 4 \vee 5}) = 0.2$$

2.12 A vehicle arriving at an intersection can turn right, turn left, or continue straight ahead. The experiment consists of observing the movement of a single vehicle through the intersection. a List the sample space for this experiment. b Assuming that all sample points are equally likely, find the probability that the vehicle turns.

a) L'espace échantillonnage est constitué des trois orientations possibles prises par le véhicule et les événements ces éléments indépendants $S = \{\{G\}, \{D\}, \{TD\}, \}$ $E_1 = \{G\}$ $E_2 = \{D\}$ $E_3 = \{TD\}$

b) La probabilité de l'événement tourner est la probabilité de la réunion des événements disjoints exclusifs que sont tourner à droite ou à gauche. La somme des probabilités de tous les événements équiprobables étant égale à la probabilité de l'espace d'échantillonnage, donc 1, on obtient alors par substitution :

$$1 \stackrel{=P(S)}{=} P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 3P(E_3) \Rightarrow P(E_3) = 0.33 \quad P(E_1 \vee E_2) = P(E_1 \cup E_2) = 2 * 0.33 = 0.66$$

2.13 Americans can be quite suspicious, especially when it comes to government conspiracies. On the question of whether the U.S. Air Force has withheld proof of the existence of intelligent life on other planets, the proportions of Americans with varying opinions are given in the table.

opinion	très probable	assez probable	improbable	autre
fraction	0.24	0.24	0.4	0.12

Suppose that one American is selected and his or her opinion is recorded. a What are the simple events for this experiment? b Are the simple events that you gave in part (a) all equally likely? If not, what are the probabilities that should be assigned to each? c What is the probability that the person selected finds it at least somewhat likely that the Air Force is withholding information about intelligent life on other planets?

a) b) c) L'espace d'échantillonnage est constitué de quatre éléments formés de deux types d'opinions dont trois échelonnées en niveaux de probabilité et d'une opinion autre, toutes répondant à la question de la dissimulation officielle des preuves d'existence de vie intelligente extra-terrestre. La probabilité des trois premiers événements étant des fractions de niveau de probabilité, ils sont d'emblée des intervalles de probabilité qui regroupent sous des dénominations linguistiques variables dans l'ordre d'intensité des plages de probabilité. Si on considère les événements "opinion" comme éléments de l'espace, les réponses sont évidentes, les probabilités de ces événements ne sont pas équiprobables et la réponse à la question c est donnée par la somme des probabilités assez et très probable 0.48. Mais Si on considère que ces éléments sont des plages de probabilité, on doit ne considérer que l'espace formé des trois premiers événements, dans ce cas, le calcul se fait sur la base de ces 3 événements et donc cette probabilité = $48/52 = 0.93$.

2.12 Un véhicule arrivant à une intersection peut tourner à droite, à gauche ou continuer tout droit. L'expérience consiste à observer le mouvement d'un seul véhicule traversant l'intersection. a) Énumérez l'espace d'échantillonnage de cette expérience. b) En supposant que tous les points de l'échantillon sont équiprobables, calculez la probabilité que le véhicule tourne.

a) L'espace échantillonnage est constitué des trois orientations possibles prises par le véhicule et les événements ces éléments indépendants $S = \{\{G\}, \{D\}, \{TD\}, \}$ $E_1 = \{G\}$ $E_2 = \{D\}$ $E_3 = \{TD\}$

b) La probabilité de l'événement tourner est la probabilité de la réunion des événements disjoints exclusifs que sont tourner à droite ou à gauche. La somme des probabilités de tous les événements équiprobables étant égale à la probabilité de l'espace d'échantillonnage, donc 1, on obtient alors par substitution :

$$1 \stackrel{=P(S)}{=} P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 3P(E_3) \Rightarrow P(E_3) = 0.33 \quad P(E_1 \vee E_2) = P(E_1 \cup E_2) = 2 * 0.33 = 0.66$$

2.13 Les Américains peuvent se montrer très méfiants, surtout lorsqu'il s'agit de complots gouvernementaux. Concernant la question de savoir si l'US Air Force a dissimulé des preuves de l'existence d'une vie intelligente sur d'autres planètes, le tableau ci-dessous présente la répartition des Américains selon leurs opinions.

opinion	très probable	assez probable	improbable	autre
fraction	0.24	0.24	0.4	0.12

Supposons qu'un Américain soit sélectionné et que son opinion soit enregistrée. a Quels sont les événements simples de cette expérience ? b Les événements simples que vous avez donnés dans la partie (a) sont-ils tous équiprobables ? Sinon, quelles sont les probabilités ? Quelles probabilités devraient être attribuées à chacun ? c Quelle est la probabilité que la personne sélectionnée trouve au moins assez probable que l'air La Force dissimule-t-elle des informations sur l'existence d'une vie intelligente sur d'autres planètes ?

2.14 A survey classified a large number of adults according to whether they were diagnosed as needing eyeglasses to correct their reading vision and whether they use eyeglasses when reading. The proportions falling into the four resulting categories are given in the following table:

	Utilise des lunettes pour la lecture	
a besoin de lunettes	OUI	NON
OUI	0.44	0.14
NON	0.02	0.40

If a single adult is selected from the large group, find the probabilities of the events defined below. The adult a needs glasses. b needs glasses but does not use them. c uses glasses whether the glasses are needed or not.

Probabilité des événements :

a besoin de lunettes $P(\text{besoin positif} \cap (\text{port} \cup \text{non port})) = 0.44 + 0.14 = 0.58$

a besoin de lunettes, mais ne les porte pas $P(\text{besoin positif} \cap \text{non port}) = 0.14$

porte les lunettes $P(\text{port} \cap (\text{besoin positif} \cup \text{besoin négatif})) = 0.44 + 0.02 = 0.46$

2.14 Une enquête a classé un grand nombre d'adultes selon qu'ils avaient reçu ou non un diagnostic de recommandation de lunettes pour corriger leur vision de lecture et s'ils utilisent des lunettes lorsqu'ils lisent. Les proportions correspondant aux quatre catégories résultantes sont indiquées dans le tableau suivant :

Si l'on choisit un seul adulte parmi le grand groupe, déterminez les probabilités des événements définis ci-dessous. L'adulte: a) a besoin de lunettes. b) a besoin de lunettes mais ne les porte pas. c) porte des lunettes, qu'il en ait besoin ou non.

2.15 An oil prospecting firm hits oil or gas on 10 % of its drillings. If the firm drills two wells, the four possible simple events and three of their associated probabilities are as given in the accompanying table. Find the probability that the company will hit oil or gas a on the first drilling and miss on the second. b on at least one of the two drillings.

2.15 Une société de prospection pétrolière découvre du pétrole ou du gaz sur 10 % de ses forages. Si la société fore deux puits, Les quatre événements simples possibles et trois de leurs probabilités associées sont donnés dans le tableau ci-joint. Déterminez la probabilité que l'entreprise découvre du pétrole ou du gaz: a) au premier forage et manque au second. b sur au moins un des deux forages.

Événement singulier	issue du 1er forage	issue du 2ème forage	probabilité
E1	réussite (huile ou gaz)	réussite (huile ou gaz)	0.01
E2	réussite	échec	?
E3	échec	réussite	0.09
E4	échec	échec	0.81

Les événements sont formés de la réunion ordonnée des issues entre le premier et le deuxième forage, on peut présupposer que l'on tient compte de l'ordre notamment pour raison statistique d'évaluation quantitative comparative. On peut désigner par R , l'issue (I) positive du forage et les puits indicés Pi pour les 2 puits. On peut alors formaliser chaque événement par 1 double application d'une opération booléenne aux 2 paramètres dont la probabilité est donnée, par la forme générale $P((E1 \times I) \times (E2 \times I))$, l'ensemble des probabilités de l'espace d'échantillonnage est alors :

$\{P(E_1) = P((P_1 \cup R) \cap (P_2 \cup R)), P(E_2) = P((P_1 \cup R) \cap (P_2 \cup \bar{R})), P(E_3) = P((P_1 \cup \bar{R}) \cap (P_2 \cup R)), P(E_4) = P((P_1 \cup \bar{R}) \cap (P_2 \cup \bar{R}))\}$ avec $(P_1 \cup R) \cap (P_2 \cup \bar{R}) = \emptyset$

Probabilité des événements : a) Comme la probabilité de l'événement 2 recherchée n'est pas définie, ce que l'on pourrait traduire par la non occurrence de l'ordre de combinaison qui le traduit, on peut émettre des hypothèses inférentielles qu'il faudrait étayer. On sonde le présupposé que les probabilités de E2 et E3 sont équivalentes, puisque les puits sont alors considérés comme équivalents et l'on a pour information complémentaire que le taux de réussite au forage est de 10 % , si l'on applique les formules de probabilité élaborées , $0.9 \cdot 0.1 = 0.1 \cdot 0.9$ cela entraîne que la probabilité E2 = probabilité E3 et elles sont déterminées par le produit des probabilités des issus (probabilité composée évoquée plus loin dans ce manuel). Donc $P(E2) = P(E3) = 0.09$ Cette hypothèse est d'ailleurs validée par la loi des sommes de probabilités des événements composants l'espace d'échantillonnage , comme le montre le tableau ci-dessous, la valeur de P(E2) ne peut être qu'égal à 0.09 et P(E2) est effectivement = P(E3)

Évén. singulier	prob de forage P1	prob. de forage P2	prob. composée	prob.
E1	0.1	0.1	$0.1 \cdot 0.1 = 0.01$	0.01
E2 (Hyp P1 = P2)	0.1	0.9	$0.1 \cdot 0.9 = 0.09$	$= 1 - 0.01 - 0.09 - 0.81 = 0.09$
E3	0.9	0.1	$0.9 \cdot 0.1 = 0.09$	0.09
E4	0.9	0.9	$0.9 \cdot 0.9 = 0.81$	0.81
$\sum_i^4 P(E_i)$			1.0	1.0

b) La probabilité de réussite à au moins l'un des deux forages peut être déduite par différence de la probabilité totale à la réussite simultanée des 2 $1 - P(E_4) = 1 - P((P_1 \cup \bar{R}) \cup (P_2 \cup \bar{R})) = 1 - 0.81 = 0.19$

2.16 Of the volunteers coming into a blood center, 1 in 3 have O+ blood, 1 in 15 have O-, 1 in 3 have A+, and 1 in 16 have A-. The name of one person who previously has donated blood is selected from the records of the center. What is the probability that the person selected has a type O+ blood? b type O blood? c type A blood? d neither type A nor type O blood?

2.16 Parmi les volontaires se présentant dans un centre de transfusion sanguine, 1 sur 3 est de groupe sanguin O+ , 1 sur 15 est de groupe O-, 1 sur 3 a le groupe sanguin A+ et 1 sur 16 a le groupe sanguin A-. Le nom d'une personne ayant déjà donné du sang est : sélectionné(e) dans les dossiers du centre. Quelle est la probabilité que la personne sélectionnée ait: a) Le type O+ ? b) Le type O ? c) Le type A ? d) Ni A ni O ?

On part de l'hypothèse pertinente qu'aucun donneur B et AB ne s'est présenté, puisque l'échantillonnage se fait dans le pool de personnes donneurs et donc que l'on ne doit pas tenir compte de leur fréquences relatives dans les calculs. Cependant, si l'on calcule la somme des fréquences individuelles, celle-ci ne nous donne pas 1, ce qui signifie que l'on a omis l'information relative à la fréquence des donneurs B et AB qui doivent être nécessairement déduites par rapport aux autres valeurs données, si l'on devait la déterminer. Cette information répond en fait à la question d , la probabilité de la sélection du type B et AB ou plus exactement du type complémentaire non renseigné correspond à la probabilité de sélection de type exclusif de A et de O. On a donc simplement toutes les probabilités recherchées.

Événement	type O+	type O-	type A+	type A-	type O	type A	type non A non O
P (sélection)	0.33	0.066	0.33	0.0625	$0.4 = 0.33 + 0.066$	$= 0.33 + 0.066 = 0.3958$	$1 - 0.4 - 0.396 = 0.2$

2.17 Hydraulic landing assemblies coming from an aircraft rework facility are each inspected for defects. Historical records indicate that 8% have defects in shafts only, 6% have defects in bushings only, and 2% have defects in both shafts and bushings. One of the hydraulic assemblies is selected randomly. What is the probability that the assembly has a bushing defect? b a shaft or bushing defect? c exactly one of the two types of defects? d neither type of defect?

2.17 Les ensembles hydrauliques d'atterrissage provenant d'un atelier de réparation d'aéronefs sont inspectés individuellement afin de détecter d'éventuels défauts. Les données historiques indiquent que 8% présentent des défauts uniquement au niveau des arbres, 6% uniquement au niveau des bagues et 2% à la fois au niveau des arbres et des bagues. Un ensemble hydraulique est sélectionné au hasard. Quelle est la probabilité que cet ensemble présente des défauts ? a) Défaut de bague ? b) Défaut d'arbre ou de bague ? c) Exactement l'un des deux types de défauts ? d) Aucun des deux types de défauts ?

La probabilité de défaut de l'échantillon sélectionné étant considérée statistiquement comme concordante à celle de l'ensemble de la population de données historiques, on a, successivement une probabilité singulière, une probabilité de disjonction inclusive ou d'union (comprenant une conjonction), de disjonction exclusive et une probabilité d'événement complémentaire de la disjonction inclusive ou d'union que l'on peut obtenir indirectement.

- a) 0.08
 b) $\mathbb{P}(d_{ar} \cup d_{ba}) = \mathbb{P}(d_{ar} \cup d_{ba} \cup (d_{ar} \cap d_{ba})) = \mathbb{P}d_{ar} + \mathbb{P}d_{ba} + \mathbb{P}(d_{ar} \cap d_{ba}) = 0.08 + 0.06 + 0.02 = 0.16$
 c) $\mathbb{P}(d_{ar} \vee d_{ba}) = \mathbb{P}d_{ar} + \mathbb{P}d_{ba} = 0.14$ d) $\mathbb{P}(d_{ar} \vee d_{ba}) = 1 - \mathbb{P}(d_{ar} \cap d_{ba}) = 0.84$

2.18 Suppose two balanced coins are tossed and the upper faces are observed. a List the sample points for this experiment. b Assign a reasonable probability to each sample point. (Are the sample points equally likely?) c Let A denote the event that exactly one head is observed and B the event that at least one head is observed. List the sample points in both A and B. d From your answer to part (c), find $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, and $P(\bar{A} \cup B)$

2.18 Supposons que deux pièces équilibrées soient lancées et que les faces supérieures soient observées. a) Énumérez les points d'échantillonnage pour cette expérience. b) Attribuez une probabilité raisonnable à chaque point d'échantillonnage. (Les points d'échantillonnage sont-ils équiprobables ?) c) Soit A l'événement « on obtient exactement une face » et B l'événement « on obtient au moins une face ». Énumérez les points d'échantillonnage pour A et B. d) À partir de votre réponse à la partie (c), trouvez $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cup B)$.

a) b) On considère que les deux pièces (1,2) sont équivalentes, étant donné que l'on recherche les résultats des probabilités de l'apparition des effigies qui sont identiques entre les deux pièces, l'évènement résultat "P1F2" obtenu est équivalent à "F1P2" = PF. Donc on choisit d'inclure les 3 sous-ensembles suivants dans l'espace des points d'échantillonnage $S = \{\{P, P\}, \{P, F\}, \{F, F\}\}$ A partir du choix fait, pour calculer la probabilité de chaque événement on doit tenir compte du fait que celui-ci est la combinaison de deux événements indépendants que sont l'apparition de l'effigie pour chaque pièce, une effigie a une probabilité singulière statistique d'apparition d'1/2, 1 étant la taille, dimension ou nombre de point de l'événement singulier recherché, et 2 la dimension de l'ensemble des événements singuliers. Mais on doit aussi, comme on a considéré le sous-ensemble PF équivalent à FP et que les pièces sont indépendantes, tenir ici compte du fait que la probabilité de l'apparition du couple effigie PF est effectivement égale à la probabilité d'apparition des effigies liées à leurs pièces c'est à dire égale à la probabilité de l'apparition de PF et FP "dans les deux ordres", ou matériellement P1F2 et F1P2, donc du double de cette apparition équivalente. Les probabilités de ces événements sont

des probabilités d'intersection de sous ensemble qui se traduisent par le produit des probabilités singulières (v. analyse combinatoire, arrangement, non encore abordé dans ce manuel).

a') b') Mais on peut tout aussi bien caractériser les probabilité par les fréquences relatives puisque cette analyse n'a pas été encore abordée. Dans ce cas là on choisit $S' = \{\{P, P\}, \{P, F\}, \{F, P\}, \{F, F\}\}$ et les probabilités sont données par le rapport des dimensions Nbr effectif / nbr possible que l'on estime représenter statistiquement les fréquences relatives d'apparition. Donc;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{P, P\}) &= \mathbb{P}(A_p \cap A_p) = \mathbb{P}(A_p) * \mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.25 &= \frac{\mathcal{D}\{\{P, P\}\}}{\mathcal{D}\{\{P, P\}, \{P, F\}, \{F, P\}, \{F, F\}\}} = \mathbb{P}(\{P, P\}) \\ \mathbb{P}(\{F, F\}) &= \mathbb{P}(A_f \cap A_f) = \mathbb{P}(A_f) * \mathbb{P}(A_f) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.25 &= \frac{\mathcal{D}\{\{F, F\}\}}{\mathcal{D}\{S'\}} = \mathbb{P}(\{F, F\}) \\ \mathbb{P}(\{P, F\})_S &= \mathbb{P}(A_p \cap A_f) = C_2^1 \mathbb{P}(A_p) \mathbb{P}(A_f) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.5 &= \frac{\mathcal{D}\{\{P, F\}, \{F, P\}\}}{\mathcal{D}\{S'\}} = \mathbb{P}(\{F, P\}, \{P, F\}) \\ \mathbb{P}(\{P, F\})_{S'} &= \mathbb{P}(A_p \cap A_f)_{S'} = \mathbb{P}(A_f \cap A_p)_{S'} = \mathbb{P}(\{F, P\})_{S'} = 0.25 &= \frac{\mathcal{D}\{\{P, F\}\}}{\mathcal{D}\{S'\}} \stackrel{\mathbb{P}(\{P, F\})}{=} \frac{\mathcal{D}\{\{F, P\}\}}{\mathcal{D}\{S'\}} = \mathbb{P}(\{F, P\})\end{aligned}$$

Les points d'échantillonnage PP et FF sont équiprobables mais pas à celui du couple PF de l'espace S, sauf si l'on avait choisi de tenir compte de la différence des pièces (S') et dans ce cas-là on aurait eu 2 points PF et FP équiprobables aux autres = 0.25 . On peut aussi valider notre calcul sur la base de notre hypothèse en constatant que selon l'axiome 2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= 1 = 0.25 + 0.25 + 0.5 = \mathbb{P}(\{P, P\}) + \mathbb{P}(\{F, F\}) + \mathbb{P}(\{F, P\}) \\ \mathbb{P}(S') &= 1 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = \mathbb{P}(\{P, P\}) + \mathbb{P}(\{F, F\}) + \mathbb{P}(\{F, P\}) + \mathbb{P}(\{P, F\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } A_S &= \{\{P, F\}\}_S \quad \text{exactement 1 face} & B_S &= \{\{P, F\}, \{F, F\}\}_S \quad \text{au moins 1 face} \\ \text{c') } A_{S'} &= \{\{P, F\}, \{F, P\}\}_{S'} \quad \text{exactement 1 face} & B_{S'} &= \{\{P, F\}, \{F, P\}, \{F, F\}\}_{S'} \quad \text{au moins 1 face}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_p \cap A_f) = .5 \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A_p \cap A_f) \cup (A_f \cap A_f)) = .75 \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}((A_p \cap A_f) \cap ((A_p \cap A_f) \cup (A_f \cap A_f))) = \mathbb{P}(A_p \cap A_f) = .5 \\ \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A_p \cap A_f) \cup ((A_p \cap A_f) \cup (A_f \cap A_f))) = \mathbb{P}((A_p \cap A_f) \cup (A_f \cap A_f)) = .75 \\ \mathbb{P}(\bar{A} \cup B) &= \mathbb{P}(((A_f \cap A_f) \cup (A_p \cap A_p)) \cup ((A_p \cap A_f) \cup (A_f \cap A_f))) = 1.0\end{aligned}$$

2.19 A business office orders paper supplies from one of three vendors, V1, V2, or V3. Orders are to be placed on two successive days, one order per day. Thus, (V2, V3) might denote that vendor V2 gets the order on the first day and vendor V3 gets the order on the second day. a List the sample points in this experiment of ordering paper on two successive days. b Assume the vendors are selected at random each day and assign a probability to each sample point. c Let A denote the event that the same vendor gets both orders and B the event that V2 gets at least one order. Find $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ and $P(A \cap B)$, by summing the probabilities of the sample points in these events.

2.19 Un service administratif commande des fournitures de bureau auprès de trois fournisseurs : F1, F2 ou F3. Les commandes doivent être passées sur deux jours consécutifs, à raison d'une commande par jour. Ainsi, (F2, F3) peut indiquer que le fournisseur F2 reçoit la commande le premier jour et le fournisseur F3 le second. a) Énumérez les points d'échantillonnage de cette expérience de commande de papier sur deux jours consécutifs. b) Supposez que les fournisseurs sont sélectionnés au hasard chaque jour et attribuez une probabilité à chaque échantillon. c) Soit A l'événement où le même fournisseur reçoit les deux commandes et B l'événement où F2 reçoit au moins une commande. Calculez $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$, en sommant les probabilités des points d'échantillonnage associés à ces événements.

Il n'a pas été spécifié que les fournisseurs ne peuvent être les mêmes d'1 jour consécutif à l'autre, donc les combinaisons possibles de couples de fournisseurs sur 2 jours donnent les points suivants:

a) $S = \{(F1, F1), (F1, F2), (F1, F3), (F2, F1), (F2, F2), (F2, F3), (F3, F1), (F3, F2), (F3, F3)\}$
 (v. fin de chap. $\mathcal{D}(S) = A_3^2 = \left(\frac{3!}{2!}\right)^2 = 9$ Comme les fournisseurs sont sélectionnés au hasard, les probabilités de sélection des différents points d'échantillon sont équivalentes.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbb{P}(F_i, F_j) &= \frac{\mathcal{D}(F_i, F_j)}{\mathcal{D}(S)} = \frac{1}{9} & \text{c) } \mathbb{P}(A) &= \frac{\mathcal{D}(F_i, F_i)}{\mathcal{D}(S)} = \frac{3}{9} \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{\mathcal{D}(F_2, F_i)}{\mathcal{D}(S)} = \frac{\mathcal{D}\{(F2, F1), (F2, F2), (F2, F3), (F1, F2), (F3, F2)\}}{\mathcal{D}(S)} = \frac{5}{9} \\ \left(= 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{\mathcal{D}\{(F1, F1), (F1, F3), (F3, F1), (F3, F3)\}}{\mathcal{D}(S)} \right) & \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\mathcal{D}\{(F2, F2)\}}{\mathcal{D}(S)} = \frac{1}{9} \\ \mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{\mathcal{D}\{(F1, F1), (F3, F3), (F2, F1), (F2, F2), (F2, F3), (F1, F2), (F3, F2)\}}{\mathcal{D}(S)} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2.20 The following game was played on a popular television show. The host showed a contestant three large curtains. Behind one of the curtains was a nice prize (maybe a new car) and behind the other two curtains were worthless prizes (duds). The contestant was asked to choose one curtain. If the curtains are identified by their prizes, they could be labeled G, D1, and D2 (Good Prize, Dud1, and Dud2). Thus, the sample space for the contestants choice is $S = \{G, D1, D2\}$.
 1 a If the contestant has no idea which curtains hide the various prizes and selects a curtain at random, assign reasonable probabilities to the simple events and calculate the probability that the contestant selects the curtain hiding the nice prize. b Before showing the contestant what was behind the curtain initially chosen, the game show host would open one of the curtains and show the contestant one of the duds (he could always do this because he knew the curtain hiding the good prize). He then offered the contestant the option of changing from the curtain initially selected to the other remaining unopened curtain. Which strategy maximizes the contestant's probability of winning the good prize: stay with the initial choice or switch to the other curtain? In answering the following sequence of questions, you will discover that, perhaps surprisingly, this question can be answered by considering only the sample space above and using the probabilities that you assigned to answer part (a).

2.20 Le jeu suivant a été présenté dans une émission de télévision populaire. L'animateur montrait à une candidate trois grands rideaux. Derrière l'un d'eux se cachait un beau prix (peut-être une voiture neuve), et derrière les deux autres, des prix sans valeur. La candidate devait choisir un rideau. Si l'on identifie les rideaux aux prix qu'ils représentent, on pourrait les nommer PB, Bab1 et Bab2 (Bon prix, Babiotes; Bab1 et Bab2). Ainsi, l'espace d'échantillonnage pour le choix des candidats est $S = \{BP, Bab1, Bab2\}$.
 a) Si la candidate ignore quels rideaux dissimulent les différents prix et en choisit un au hasard, attribuez des probabilités raisonnables aux événements simples et calculez la probabilité qu'elle choisisse le rideau cachant le bon prix. b) Avant de révéler à la candidate ce qui se trouvait derrière le rideau initialement choisi, l'animateur du jeu ouvrait un des rideaux et lui montrait un rideau sans valeur (il pouvait toujours le faire car il connaissait le rideau cachant le bon prix). Il proposait ensuite à la candidate la possibilité de changer de rideau, passant du rideau initialement choisi à l'autre rideau encore fermé. Quelle stratégie maximise ses chances de gagner le gros lot : conserver son choix initial ou changer de rideau ? En répondant aux questions suivantes, vous constaterez, peut-être de façon surprenante, que l'on peut répondre à cette question en considérant uniquement l'espace d'échantillonnage ci-dessus et en utilisant les probabilités que vous avez attribuées pour répondre à la question (a).

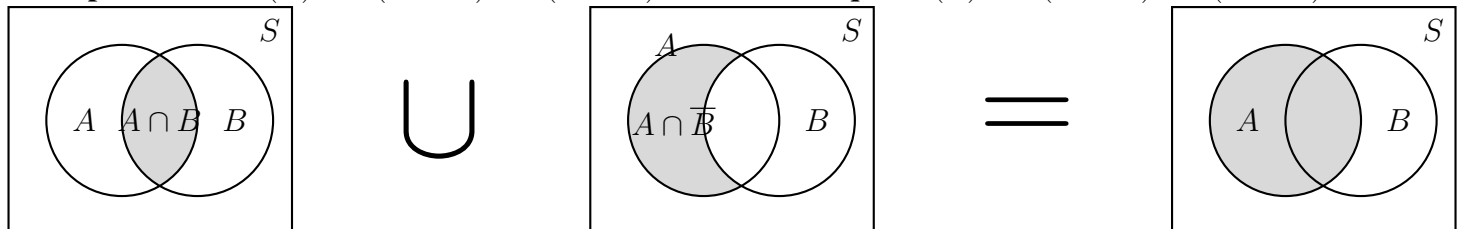
i If the contestant choses to stay with her initial choice, she wins the good prize if and only if she initially chose curtain G. If she stays with her initial choice, what is the probability that she wins the good prize? ii If the host shows her one of the duds and she switches to the other unopened curtain, what will be the result if she had initially selected G? iii Answer the question in part (ii) if she had initially selected one of the duds. iv If the contestant switches from her initial choice (as the result of being shown one of the duds), what is the probability that the contestant wins the good prize? v Which strategy maximizes the contestant's probability of winning the good prize: stay with the initial choice or switch to the other curtain?

a) $P(BP) = P(Bab1)=P(Bab2) = 1/3$ ($P(Bab)= 2/3$)

b)i Que le rideau retiré contenant la babiole soit virtuellement ou non celui à babiole que la candidate aurait choisi n'a qu'1 influence unique sur sa stratégie de choix, puisque elle a à l'origine 1 possibilité sur 3 de réussite, alors la certitude qu'1 des 2 rideaux à éviter est révélé, la probabilité tombe de 1/3 à 1/2; donc la probabilité de réussite est le rapport du nombre potentiel de rideau à gros gain sur le nombre de rideau non révélé. Il reste au final 2 choix dont un est gagnant. Comme il sera certainement abordé plus loin dans le cours avec la probabilité conditionnelle, on peut se poser la question de savoir comment est influencé la probabilité de réussite compte tenu de la révélation d'un des prix. Le calcul simple a montré que l'on passe de 1/3 à 1/2, reste à savoir s'il existe ensuite une stratégie pour maximiser le gain. ii/iii Si elle change de choix alors qu'elle avait le bon prix la probabilité de réussite tombe évidemment à zéro et réciproquement si elle garde son choix hypothétiquement non porteur de gain, sa probabilité de réussite est également nulle, donc les deux nouvelles probabilités conditionnelles sont équivalentes, ce qui conduit à conclure qu'aucune stratégie ne permet de maximiser son gain. iv/v comme argumenté précédemment, on conclut que le changement d'avis, n'a aucune influence sur la variation de probabilité, elle reste toujours de 1/2, puisque 1 fois connue le lot derrière le 3ème rideau, elle ne peut obtenir aucun gain d'information permettant de maximiser sa chance, elle se trouve dans 1 nouvelle situation de probabilité indépendante de la première régie par une possibilité gagnante sur 2 possibilités équivalentes.

i. Si la candidate choisit de conserver son choix initial, elle remporte le bon prix si et seulement si elle a initialement choisi le rideau BP. Si elle conserve son choix initial, quelle est la probabilité qu'elle remporte le bon prix ? ii. Si l'animateur lui montre un des rideaux à babiole et qu'elle opte pour l'autre rideau non ouvert, quel sera le résultat si elle avait initialement sélectionné BP ? iii Répondez à la question de la partie (ii) si elle avait initialement sélectionné l'un des lots à babioles. iv Si la candidate change d'avis (après avoir vu l'un des lots à babiole), quelle est la probabilité qu'elle remporte le bon prix ? v Quelle stratégie maximise la probabilité de la candidate de remporter le bon prix : rester avec le choix initial ou en passant à l'autre rideau ?

2.21 If A and B are events, use the result derived in Exercise 2.5(a) and the Axioms in Definition 2.6 to prove that: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ **2.21 Si A et B sont des événements, utilisez le résultat obtenu dans l'exercice 2.5(a) et les axiomes de la définition 2.6 pour démontrer que: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$**



Dans l'ex. 2.5a on a montré par les diagrammes et les lois de distributivités de l'union sur l'intersection que :

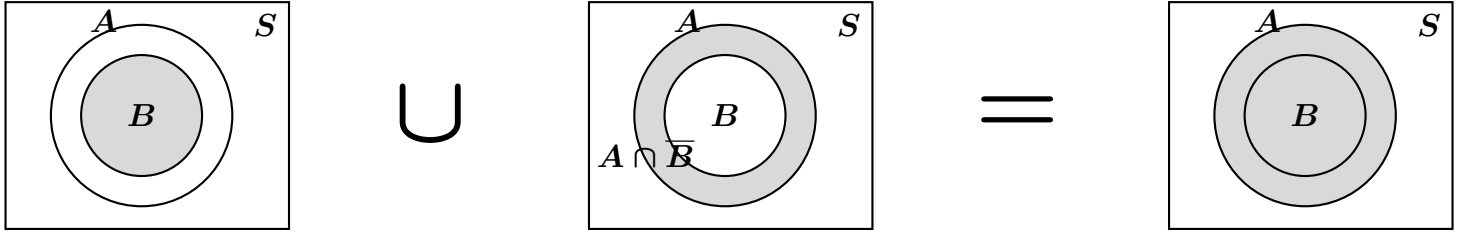
$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup \bar{B})) = A \cap ((B \cup A) \cap S) = (A \cap B) \cup (A \cap A) = A$$

De plus, selon l'axiome 3 de la définition des lois de probabilités appliquées sur les événements de l'espace d'échantillonnage la probabilité ou la fréquence relative de la réunion des événements indépendants est la somme de leur probabilité. Le premier événement ici est l'intersection de A et de B, le second l'intersection de A avec le complémentaire de B, et les deux événements sont indépendants; $\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$ Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \\ \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

2.22 If A and B are events and $B \subset A$, use the result derived in Exercise 2.5(b) and the Axioms in Definition 2.6 to prove that: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$

2.22 Si A et B sont des événements et $B \subset A$, utilisez le résultat obtenu dans l'exercice 2.5(b) et les axiomes de Définition 2.6 pour prouver que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$



Dans l'ex. 2.5b on a montré par les diagrammes et les lois de distributivités de l'union sur l'intersection que :

$$\begin{aligned} B \cup (A \cap \bar{B}) &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \underbrace{(A \cup A) \cap (B \cup \bar{B})}_{(A \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = A} = (A \cap ((A \cup \bar{B}) \cap \underbrace{(B \cup \bar{B})}_S)) \\ &= ((A \cap A) \cup (A \cap \bar{B})) \cap S = (A \cup \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{\subset A}) \cap S = A \cap S = A \end{aligned}$$

De plus, selon l'axiome 3 de la définition des lois de probabilités appliquées sur les événements de l'espace d'échantillonnage la probabilité ou la fréquence relative de la réunion des événements indépendants est la somme de leur probabilité. Le premier événement ici est l'intersection de A et de B, càd B, puisque B est inclu dans A, le second l'intersection de A avec le complémentaire de B, et les deux événements sont indépendants; $\mathbb{P}((B) \cup (A \cap \bar{B})) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$ Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} B \cup (A \cap \bar{B}) = A \\ \mathbb{P}(B) \cup (A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

2.23 If A and B are events and $B \subset A$, why is it “obvious” that $P(B) \leq P(A)$? 2.24 Use the result in Exercise 2.22 and the Axioms in Definition 2.6 to prove the “obvious” result in Exercise 2.23.

2.23 Si A et B sont des événements et $B \subset A$, pourquoi est-il « évident » que $P(B) \leq P(A)$? 2.24 Utilisez le résultat de l'exercice 2.22 et les axiomes de la définition 2.6 pour prouver le résultat « évident » de l'exercice 2.23.

On a montré dans l'exercice 2.22 que dans la condition où B est inclu dans A ;

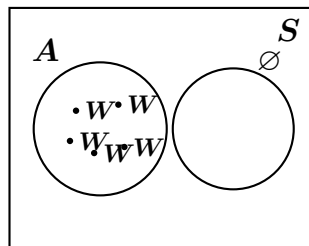
$$B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \quad \text{Or,} \quad \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \geq \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\forall (A \cap \bar{B}) \subset A}$

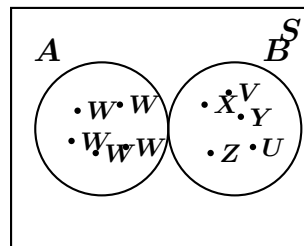
2.25 A single car is randomly selected from among all of those registered at a local tag agency. What do you think of the following claim? “All cars are either Volkswagens or they are not. Therefore, the probability is 1/2 that the car selected is a Volkswagen.”

2.25 Une seule voiture est sélectionnée au hasard parmi toutes celles enregistrées auprès d’une agence d’immatriculation locale. Que pensez-vous de l’affirmation suivante ? « Toutes les voitures sont soit des Volkswagen, soit elles ne le sont pas. Par conséquent, la probabilité que la voiture sélectionnée soit une Volkswagen est de 1/2. »

L’espace d’échantillonnage est l’ensemble formé du lot de toutes les voitures d’une seule marque et de l’évènement vide du lot de marque différente. La probabilité est donc de 1 si la voiture sélectionnée est de cette marque, en l’occurrence une Volkswagen, sinon 0. On aurait pu avoir une probabilité autre, voire de 1/2 dans le cas seul si la moitié des voitures avaient été des Volkswagen, un schéma de Venn permet de le montrer.



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(W) = 1 \\ \mathbb{P}(\bar{A}) &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W) &= 0.5 \\ \mathbb{P}(\bar{W}) &= 0.5\end{aligned}$$

2.26 Three imported wines are to be ranked from lowest to highest by a purported wine expert. i.e, 1 wine will be identified as best, another as 2nd best, and the remaining wine as worst. a Describe 1 sample point for this experiment. b List the sample space. c Assume that the “expert” really knows nothing about wine and randomly assigns ranks to the 3 wines. One of the wines is of much better quality than the others. What is the probability that the expert ranks the best wine no worse than second best?

2.26 Un prétendu expert en vin doit classer 3 vins importés du moins bon au meilleur. Autrement dit, 1 vin sera désigné comme le meilleur, 1 autre comme le 2ème meilleur et le dernier comme le pire. a) Décrivez 1 point d’échantillonnage pour cette expérience. b) Énumérez l’espace d’échantillonnage. c) Supposons que l’« expert » ne connaisse rien au vin et attribue aléatoirement des rangs aux 3 vins. L’un des vins est de bien meilleure qualité que les autres. Quelle est la probabilité que l’expert classe le meilleur vin au moins au-delà du 2ème meilleur ?

a/b/ Choisir $E_1 = \{M\}$ $S = \{\{M\}, \{MB\}, \{P\}\}$

c/ Si l’expert attribue aléatoirement des rangs aux vins, on peut créer un nouvel espace d’échantillonnage comportant la combinaison du rang et de la qualité du vin, ainsi $S' = \{\{1, M\}, \{2, M\}, \{3, M\}, \{1, MB\}, \{2, MB\}, \{3, MB\}, \{1, P\}, \{2, P\}, \{3, P\}\}$ Sa probabilité de classer le meilleur vin au-delà du 2ème meilleur est donnée par la proportion de couple dont le rang est au plus 2 et dont le vin est le meilleur sur l’ensemble formé des points d’événements de meilleur vin choisi couplé aux 3 rangs possibles. C’est-à-dire :

$$P = \frac{\dim(\{1, M\}, \{2, M\})}{\dim(\{1, M\}, \{2, M\}, \{3, M\})} = \frac{2}{3} = 0.66$$

En effet, si on veut caractériser cette probabilité plus rigoureusement, on doit prendre l’ensemble possible comme l’intersection de l’évènement meilleur vin choisi avec un rang d’au plus deux sur l’évènement meilleur vin choisi avec un rang quelconque ou la probabilité conditionnelle de rang au plus 2 sachant qu’il a choisi le meilleur :

$$P = P(r < 3, M) = P((r < 3) \cap M) = P_M(r < 3) = \frac{\dim(\{1, M\}, \{2, M\})}{\dim(\{1, M\}, \{2, M\}, \{3, M\})} = \frac{2}{3} = 0.66$$

2.27 In Ex. 2.12 we considered a situation where cars entering an intersection each could turn right, turn left, or go straight. An experiment consists of observing 2 vehicles moving through the intersection. a How many sample points are there in the sample space? List them. b Assuming that all sample points are equally likely, what is the prob. that at least 1 car turns left? c Again assuming equally likely sample points, what is the probability that at most 1 vehicle turns?

2.27 Dans l'exercice 2.12, nous avons considéré une situation où les voitures entrant dans une intersection pouvaient tourner à droite, à gauche ou continuer tout droit. Une expérience consiste à observer deux véhicules traversant l'intersection. a) Combien de points d'échantillonnage y a-t-il dans l'espace échantillonnal ? Énumérez-les. b) En supposant que tous les points d'échantillonnage sont équiprobables, quelle est la probabilité qu'au moins 1 voiture tourne à gauche ? c En supposant à nouveau que les points d'échantillonnage soient équiprobables, quelle est la probabilité qu'au plus 1 véhicule tourne ?

a) Comme il sera abordé plus loin dans le cours, la dimension de l'ensemble d'échantillonnage est donné par le produit des 3 possibilités d'orientation pour l'une des voitures à celui des 3 mêmes orientations pour l'autre, donc 9, ou le produit de deux arrangements de 3 éléments dans un $A_3^1 * A_3^1 = 3 * 3 = 9$ Ce qui correspond à l'ensemble de couple : $S = \{(D, D), (D, G), (D, TD), (G, D), (G, G), (G, TD), (TD, D), (TD, G), (TD, TD)\}$

b) La probabilité qu'au moins 1 voiture tourne à gauche est donnée par le rapport de la dimension de l'ensemble des événements d'au moins une voiture tournant à gauche , donc de la forme $(G,G)(G,X)(X,G)$, sur la dimension de l'ensemble des possibles;

$$P((G, G) \vee (G, X) \vee (X, G)) = \frac{\dim((D, G), (G, D), (G, G), (TD, G), (G, TD))}{\dim(S)} = \frac{5}{9}$$

c) La probabilité qu'au plus 1 véhicule tourne peut être déterminé de 2 manières , en recherchant la probabilité de l'évènement complémentaire, donc le complémentaire à l'évènement : 2 véhicules tournent, ou, directement comme en a, par le rapport de la dimension de l'ensemble des couples tel que l'1 au plus est orienté à gauche ou à droite , de la forme $((ND \cap TD) \vee (TD \cap ND) \vee (TD \cap TD))$, sur la dimension de S. Pour simplifier l'écriture, on évite les seuls opérateurs d'intersection et réunion, il serait d'ailleurs probablement impossible de formuler qu'avec ceux-ci.

$$\mathbb{P}(((ND \cap TD) \vee (TD \cap ND) \vee (TD \cap TD))) = 1 - P((D/G) \vee (G/D) \vee (G, G) \vee (D, D)) = 1 - \frac{\dim((D, D), (D, G), (G, D), (G, G))}{\dim(S)} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0.55$$

$$\mathbb{P}((ND \cap TD) \vee (TD \cap ND) \vee (TD \cap TD)) = \frac{\dim((D, TD), (G, TD), (TD, D), (TD, G), (TD, TD))}{\dim(S)} = \frac{5}{9} = 0.55$$

2.28 Four equally qualified people apply for two identical positions in a company. One and only one applicant is a member of a minority group. The positions are filled by choosing two of the applicants at random. a List the possible outcomes for this experiment. b Assign reasonable probabilities to the sample points. c Find the probability that the applicant from the minority group is selected for a position.

2.28 Quatre personnes aux qualifications équivalentes postulent pour deux postes identiques dans une entreprise. Un seul candidat appartient à un groupe minoritaire. Les postes sont attribués en choisissant deux candidats au hasard. a) Énumérez les résultats possibles de cette expérience. b) Attribuez des probabilités raisonnables aux points de l'échantillon. c) Calculez la probabilité que le candidat issu du groupe minoritaire soit sélectionné pour le poste.

a)b) Etant donné la distinction faite de candidats appartenant ou non à un groupe minoritaire, l'ensemble des couples de résultats comporte ou non 1 candidat minoritaire. On peut considérer que les candidats non issu de groupe minoritaire sont équivalents, donc l'ensemble d'échantillonnage S n'est constitué que de 2 éléments (couples), non nécessairement équiprobables selon le nombre de candidats de groupe minoritaire (ici accidentellement oui). On peut également représenter les éléments comme des couples de personnes distinctes avec ou sans origines particulières et pour distinguer les personnes non issues de groupes minoritaires leur attribuer un indice d'individualité, dans ce cas-là, les éléments de S' sont équiprobables. Les dimensions des ensembles peuvent être calculé par des formules de probabilité simple ou combinatoires (v. suite du cours)

$$S = \{(M, X), (X, X)\} \quad S' = \{(M, X_1), (M, X_2), (M, X_3), (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3)\}$$

$$\dim(S) = \dim(C_1 \cup C_2) = 1 + 1 = 2 \quad \dim(S') = C_3^2 * C_2^1 = 3 * 2 = 6$$

$$\mathbb{P}((M, X))_S = \frac{3}{6} = 0.5 \quad \mathbb{P}((X, X))_S = \frac{3}{6} = 0.5 \quad \mathbb{P}((X, Y))_{S'} = \frac{\dim(X, Y)}{\dim(S')} \underset{X \neq Y}{=} \frac{1}{6} = 0.166$$

$$c/ \begin{cases} \mathbb{P}((M, Y))_S = \frac{\dim(M, X)}{\dim(S)} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ \mathbb{P}((M, X_i))_{S'} = \frac{\dim(M, X)}{\dim(S)} = \frac{\dim((M, X_1), (M, X_2), (M, X_3))}{\dim(S)} = \frac{3}{6} = 0.5 \end{cases}$$

2.29 Two additional jurors are needed to complete a jury for a criminal trial. There are six prospective jurors, two women and four men. Two jurors are randomly selected from the six available. a Define the experiment and describe one sample point. Assume that you need describe only the two jurors chosen and not the order in which they were selected. b List the sample space associated with this experiment. c What is the probability that both of the jurors selected are women?

2.29 Deux jurés supplémentaires sont nécessaires pour compléter un jury dans un procès pénal. Il y a six jurés potentiels, deux femmes et quatre hommes. Deux jurés sont sélectionnés au hasard parmi les six disponibles. a) Définissez l'expérience et décrivez un point d'échantillonnage. Supposez que vous n'avez à décrire que ce sont les deux jurés choisis, et non l'ordre dans lequel ils ont été sélectionnés. b) Indiquez l'espace échantillonnal associé à cette expérience. c) Quelle est la probabilité que les deux jurés sélectionnés soient des femmes ?

a) On distingue les jurés candidats par leur individualités et leur sexes, on emploie des indices pour les distinguer dans un même groupe de sexes distingués également par leur abréviation, mais comme l'ordre n'a pas d'importance, les couples formés sont les ensembles deux à deux distincts parmi les 6 candidats homme ou femme, donc, comme il sera étudié plus loin dans le cours, on les forme par un arrangement de pair de jurés parmi 6 sujets dont la moitié étant équivalente doivent être déduite, en somme une combinatoire de 6 dans 2.

$$S = \{(F1, F2), (F1, M1), (F1, M2), (F1, M3), (F1, M4), (F2, M1), (F2, M2), (F2, M3), (F2, M4), (M1, M2), (M1, M3), (M1, M4), (M2, M3), (M2, M4), (M3, M4)\}$$

$$\dim(S) = \frac{A_6^2}{2} = C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 * 5}{2} = 15$$

c) Il n'y a qu'un seul couple possible de jurés femmes puisqu'il n'y a que 2 femmes candidates, donc la probabilité est :

$$\mathbb{P}(F, F)_S = \frac{\dim((F1, F2))}{\dim(S)} = \frac{1}{15}$$

2.30 According to Webster's New Collegiate Dictionary, a divining rod is "a forked rod believed to indicate [divine] the presence of water or minerals by dipping downward when held over a vein." To test the claims of a divining rod expert, skeptics bury four cans in the ground, two empty and two filled with water. The expert is led to the four cans and told that two contain water. He uses the divining rod to test each of the four cans and decide which two contain water. a List the sample space for this experiment. b If the divining rod is completely useless for locating water, what is the probability that the expert will correctly identify (by guessing) both of the cans containing water?

2.30 Selon le dictionnaire Webster's New Collegiate Dictionary, une baguette de sourcier est « une tige fourchue censée indiquer la présence d'eau ou de minéraux en s'inclinant vers le bas lorsqu'on la tient au-dessus d'un filon ». Pour vérifier les dires d'un expert en baguettes de sourcier, des sceptiques enterrent quatre boîtes de conserve, deux vides et deux remplies d'eau. L'expert est conduit jusqu'aux quatre boîtes et on lui dit que deux contiennent de l'eau. Il utilise alors sa baguette de sourcier pour tester chacune des quatre boîtes et déterminer lesquelles contiennent de l'eau. a) Déterminez l'espace d'échantillonnage de cette expérience. b) Si la baguette de sourcier est totalement inutile pour localiser l'eau, quelle est la probabilité que l'expert identifie correctement (par déduction) les deux boîtes contenant de l'eau ?

a) On distingue les boîtes vides des boîtes remplies ainsi que les emplacements de ces boîtes qui sont au nombre de 4, on a donc 4 éléments en série formant l'espace d'échantillonnage, puisque chaque emplacement comporte nécessairement une boîte avec deux possibilités. La série est contrainte d'avoir nécessairement 2 boîtes vides et 2 boîtes pleines. Comme on souhaite tester la potentialité de prédiction du sourcier pour chaque boîte l'espace d'échantillonnage est simplement formé d'une boîte test parmi 4 éléments possibles dont 2 sont vides et 2 pleins. La dimension de l'espace est obtenu par la combinatoire d'une boîte test parmi les 4 éléments:

$$S = \{(V1, V2, P1, P2)\} \quad \dim(S) = C_4^1 = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4}{1} = 4$$

b) A chaque emplacement il y a possibilité de présence de 2 boîtes pleine parmi les 4 possibilités, en substance une probabilité 0.5 favorable ou non. La probabilité que le sourcier identifie successivement 2 boîtes est la probabilité de l'intersection de 2 sorts successivement favorables, donc le produit de probabilité d'identification individuelle positive;

$$\mathbb{P}(P, P)_S = \mathbb{P}(P \cap P)_S = \frac{\dim((P))}{\dim(S)} * \frac{\dim((P))}{\dim(S)} = \frac{2}{4} * \frac{2}{4} = 0.25$$

On peut aussi envisager le problème différemment, comme il est demandé de calculer la probabilité d'identifier 2 boîtes contenant de l'eau, on peut considérer un espace d'échantillonnage de couple de boîtes et caractériser la probabilité d'identification de la paire pleine; $S' = \{(V1, V2), (V1, P1), (V1, P2), (V2, P1), (V2, P2), (P1, P2)\}$

$$\dim(S') = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 \quad \text{Alors la probabilité recherchée serait directement donnée par le rapport :}$$

$$\mathbb{P}(P, P)_{S'} = \frac{\dim(P, P)}{\dim(S')} = \frac{1}{6} \quad \text{Puisque l'on envisage la probabilité de succès total sur 1 couple de boîtes pleines, elle est plus faible et dépend du cadre méthodologique limitant l'échantillon à 4 boîtes dont 2 pleines.}$$

2.31 The Bureau of the Census reports that the median family income for all families in the United States during the year 2003 was \$ 43,318. That is, half of all American families had incomes exceeding this amount, and half had incomes equal to or below this amount. Suppose that four families are surveyed and that each one reveals whether its income exceeded \$ 43,318 in 2003. a List the points in the sample space. b Identify the simple events in each of the following events: A: At least two had incomes exceeding \$ 43,318. B: Exactly two had incomes exceeding \$ 43,318. C: Exactly one had income less than or equal to \$ 43,318. c Make use of the given interpretation for the median to assign probabilities to the simple events and find P(A), P(B), and P(C).

2.31 Le Bureau du recensement indique que le revenu médian des familles américaines s'élevait à 43 318 \$ en 2003. Autrement dit, la moitié des familles américaines avaient un revenu supérieur à ce montant, et l'autre moitié un revenu égal ou inférieur. Supposons que quatre familles soient interrogées et que chacune indique si son revenu dépassait 43 318 \$ en 2003. a) Énumérez les points de l'espace d'échantillonnage. b) Identifiez les événements simples dans chacun des cas suivants : A: Au moins deux d'entre eux avaient des revenus supérieurs à 43 318 \$. B : Exactement deux personnes avaient des revenus supérieurs à 43 318 \$. C : Une seule personne avait un revenu inférieur ou égal à 43 318 \$. c Utilisez l'interprétation donnée pour la médiane afin d'attribuer des probabilités aux événements simples et trouvez P(A), P(B) et P(C).

A) Dans la série de 4 familles sélectionnées , chacune peut avoir indifféremment un revenu supérieur ou inférieur au revenu médian, donc 2 possibilités par famille. On peut modéliser de deux manières, considérer que les familles se distinguent entre elles et ne sont pas équivalentes, donc toutes les possibilités combinatoires sont données par le produit de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou 2^4 , et la liste des éléments est la série de 4 familles dont alternativement 0, 1, 2 , 3 ou 4 parmi elles ont des revenus supérieurs et ceci pour les distinguer dans une combinaison 0 , 4, ,3, 2 , 1 regroupements possibles; toutes inférieures, la première , la seconde, la troisième ou la quatrième supérieure..etc. On peut également envisager l'alternative où les quatre familles sont équivalentes et on ne considère que le nombre distincts possibles de revenus supérieurs, donc 5, une combinatoire de 4 dans 1 plus le cas d'aucun revenu supérieur;

$S\{(I, I, I, I), (S, I, I, I), (I, S, I, I), (I, I, S, I), (I, I, I, S), (S, S, I, I), (S, I, S, I), (S, I, I, S), (I, S, S, I), (I, S, I, S), (I, I, S, S), (S, S, S, I), (S, S, I, S), (S, I, S, S), (I, S, S, S), (S, S, S, S)\}$ $d(S) = 2^4 = 16$

$S' = \{(I, I, I, I), (S, I, I, I), (S, S, I, I), (S, S, S, I), (S, S, S, S)\}$ $\dim(S') = C_4^1 + 1 = \frac{4!}{3!1!} + 1 = 5$

bA) La liste des événements comportant 2 ou plus de 2 familles à revenus supérieurs est:

$E_{S \geq 2} = \{(S, S, I, I), (S, I, S, I), (S, I, I, S), (I, S, S, I), (I, S, I, S), (I, I, S, S), (S, S, S, I), (S, S, I, S), (S, I, S, S), (I, S, S, S), (S, S, S, S)\}$ $\dim(E_{S \geq 2}) = 16 - E_{S < 2} = 11$ $\left(\mathbb{P}(E_{S \geq 2}) = \frac{11}{16} \right)$

b'A) seconde alternative; $E_{S' \geq 2} = \{(S, S, I, I), (S, S, S, I), (S, S, S, S)\}$ $\dim(S) = 3$ $\left(\mathbb{P}(E_{S' \geq 2}) = \frac{3}{5} \right)$

bB) La liste des événements comportant exactement 2 familles à revenu supérieur:

$E_{S=2} = \{(S, S, I, I), (S, I, S, I), (S, I, I, S), (I, S, S, I), (I, S, I, S), (I, I, S, S)\}$ $d(E) = 6$ $\mathbb{P} = \frac{3}{8}$

$E_{S'=2} = \{(S, S, I, I)\}$ $\dim(E_{S'=2}) = 1$ $\mathbb{P} = \frac{1}{5}$

bC) La liste des événements à une seule personne à revenu égal ou inférieur:

$E_{S=1} = \{(I, S, S, S), (S, I, S, S), (S, S, I, S), (S, S, S, I)\}$ $\dim(E_{S=2}) = 4$ $\mathbb{P}(E_{S=2}) = \frac{1}{4}$

$E_{S'=1} = \{(S, S, S, I)\}$ $\dim(E_{S'=2}) = 1$ $\mathbb{P}(E_{S'=2}) = \frac{1}{5}$

c) La médiane caractérise sur l'ensemble de la population la moitié des familles à revenus supérieurs ou alternativement égaux ou inférieurs au montant donné, donc correspond par extrapolation dans l'évènement d'échantillonnage au rapport de la dimension de l'ensemble comportant 2 familles de revenu supérieur sur la dimension totale de l'espace d'échantillonnage. Cette valeur est de 0.5 sur la population totale. Si on extrapole sur l'échantillon de 4 familles, on s'attend dans le cas où on considère que notre échantillon est représentatif de la population, à avoir une probabilité de 0.5 pour la probabilité de l'évènement bB , c.à.d. celle du rapport de familles à revenu supérieur au montant de la médiane sur la dimension de l'ensemble. On a cependant selon les deux modalités ;

$$\mathbb{P}(E_{S=2}) = \frac{3}{8} = 0.375 \quad \mathbb{P}(E_{S'=2}) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Analysons ce biais. Tout d'abord, il semble évident que la dimension de l'échantillon de 4 familles représentatives de la population semble extrêmement petite. Pour s'en convaincre, calculons la probabilité complémentaire qui consiste à calculer le rapport de la dimension du nombre de famille de revenu égal à inférieur sur la dimension totale; on s'attend à une valeur comparable et à ce que la somme soit égale à 1.

$$\mathbb{P}(E_{S<2}) = \frac{5}{16} = 0.312 \quad \mathbb{P}(E_{S'<2}) = \frac{2}{5} = 0.4$$

Dans la première alternative, les valeurs sont assez proches et on s'attend à ce que ce soit le cas, puisque toutes deux représentent la valeur de la médiane, ce qui n'est pas le cas pour l'ensemble S' . Mais cette valeur n'est pas non plus égale à 0.5 et la somme des probabilités dans les deux cas n'est pas égale à un.

On vérifie pourtant l'axiome 2 de la probabilité de l'espace d'échantillonnage de la définition 2.6

$$\mathbb{P}_S = \mathbb{P}(E_{S<2}) + \mathbb{P}(E_{S=2}) + \mathbb{P}(E_{S>2}) = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} + \frac{5}{16} = 1$$

$$\mathbb{P}_{S'} = \mathbb{P}(E_{S'<2}) + \mathbb{P}(E_{S'=2}) + \mathbb{P}(E_{S'>2}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Pour conclure, le choix d'échantillonnage de 4 familles pour représenter la population totale ne semble pas dénué de sens. On part du principe que pour approcher la valeur médiane, il semble judicieux de devoir créer des classes de nombres pairs de familles représentatifs de la population et s'attendre à observer une probabilité de 0.5 lorsque la moitié de l'effectif a un revenu supérieur au revenu médian. Mais on voit que l'on n'obtient pas cette valeur avec 4 éléments bien que tous les axiomes de la définition 2.6 soient vérifiés. La raison pour laquelle on n'obtient pas le résultat escompté est que nos échantillonnages selon les 2 modalités ne respectent pas la règle d'équivalence des probabilités et les résultats le montrent. En effet, dans nos calculs on a fait comme si chaque élément avait 1 même pondération et logiquement on s'attend à trouver par ex. 0.5 pour le revenu médian, mais dans les faits les proportions ne représentent pas les fréquences relatives, la preuve en est que par ex. dans la 2ème modalité on ne trouve qu'une probabilité de 0.2 pour l'échantillon représentatif de revenu supérieur à la valeur médiane, ce qui est dérisoire. On peut remarquer que dans les dernières équations, si l'on prend la moitié de la valeur centrale à sommer avec une valeur extrême, on obtient bien la fréquence cumulée de 0.5 attendue. En effet la valeur centrale se trouve entre les 2 classes extrêmes. Ce qui correspond à la valeur médiane que représente une distribution sur la population, c'est ce calcul qui nous permet de montrer que cet échantillonnage de 4 familles est valable sitôt que l'on interprète bien le problème et que l'on considère la valeur cumulée représentative de la médiane.

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{S=2}) + \mathbb{P}(E_{S>2}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{S=2}) + \mathbb{P}(E_{S<2}) = 0.5 \quad \checkmark$$

2.32 Patients arriving at a hospital outpatient clinic can select one of 3 stations for service. Suppose that physicians are assigned randomly to the stations and that the patients therefore have no station preference. Three patients arrive at the clinic and their selection of stations is observed. a List the sample points for the experiment. b Let A be the event that each station receives a patient. List the sample points in A. c Make a reasonable assignment of probabilities to the sample points & find P(A).

2.32 Les patients arrivant dans 1 clinique externe d'hôpital peuvent choisir l'un des 3 postes de service. Supposons que les médecins soient affectés aléatoirement aux différents services et que les patients n'aient donc aucune préférence. Trois patients arrivent à la clinique et leur choix de service est observé. a) Énumérez les points d'échantillonnage de l'expérience. b) Soit A l'événement « chaque station reçoit 1 patient ». Énumérez les points d'échantillonnage de A. c) Attribuez des probabilités raisonnables aux points d'échantillonnage et calculez P(A).

a/ Chaque patient a 3 possibilités de choix, la dimension de l'espace d'échantillonnage est donnée par le produit des choix possibles 3 fois de suite donc 27. Désignons par S_i les services, et les patients selon leur position fixe dans chaque ensemble. On les forme par exemple en attribuant et fixant le premier patient au 1er service que l'on combine avec les arrangements des 2 autres patients dans les 3 services avec répétition puisque l'ordre de l'arrangement compte (v. suite du cours), on procède de même en affectant successivement ce patient au 2ème et 3ème service, donc on a au final : $3 * 3^2$ possibilités, donc 27, ce qui concorde avec la dimension calculée.

$\{(S1, S1, S1), (S1, S2, S1), (S1, S1, S2), (S1, S2, S2), (S1, S1, S3), (S1, S3, S1), (S1, S2, S3), (S1, S3, S2), (S1, S3, S3), (S2, S1, S1), (S2, S2, S1), (S2, S1, S2), (S2, S2, S2), (S2, S1, S3), (S2, S3, S1), (S2, S2, S3), (S2, S3, S2), (S2, S3, S3), (S3, S1, S1), (S3, S2, S1), (S3, S1, S2), (S3, S2, S2), (S3, S1, S3), (S3, S3, S1), (S3, S2, S3), (S3, S3, S2), (S3, S3, S3)\}$ $\dim(\mathbb{S}) = 3^3 = 27$

b/ On doit créer la liste des triplets d'indices deux à deux tous différents, à nouveau on en obtient la dimension, comme il sera certainement abordé plus loin dans le cours, par le factoriel de 3; selon un arrangement de 3 éléments en 3 positions, en effet successivement 3 services sont disponibles pour le premier patient, ce qui ne laisse que 2 choix possibles pour le second et un pour le dernier; si l'on fixe le premier au premier patient, il y a 2 possibilités pour les deux autres patient 2ème et 3ème ou 3ème et 2ème service, et ainsi de suite 3 X, donc $3*2$, ce qui correspond bien à $\dim(A) = 3! = 3*2*1 = 6$.

$\{(S1, S2, S3), (S1, S3, S2), (S2, S1, S2), (S2, S2, S1), (S3, S1, S2), (S3, S2, S1)\}$ $\dim(\mathbb{A}) = 3! = 6$

c/ Les événements sont équiprobables, étant donné le caractère totalement aléatoire de distribution des patients parmi les 3 services, on a statistiquement nécessairement des événements équiprobables dont la probabilité est donnée par :

$$\dim(E_i) \frac{\dim(\mathbb{E}_{\square})}{\dim(\mathbb{S})} = \frac{1}{27} \quad \text{Et } \mathbb{P}(A) = \frac{\dim(\mathbb{A})}{\dim(\mathbb{S})} = \frac{6}{27} = 0.22$$

2.33 A boxcar contains six complex electronic systems. Two of the six are to be randomly selected for thorough testing and then classified as defective or not defective. a) If two of the six systems are actually defective, find the probability that at least one of the two systems tested will be defective. Find the probability that both are defective. b) If four of the six systems are actually defective, find the probabilities indicated in part (a).

2.33 Un wagon contient six systèmes électroniques complexes. Deux de ces six systèmes doivent être sélectionnés au hasard pour des tests approfondis, puis classés comme défectueux ou non défectueux. a) Si deux des six systèmes sont effectivement défectueux, quelle est la probabilité qu'au moins un des deux systèmes testés soit défectueux ? Quelle est la probabilité que les deux systèmes soient défectueux ? b) Si quatre des six systèmes sont effectivement défectueux, calculez les probabilités indiquées en a).

Composons d'abord l'espace d'échantillonnage, qui consiste en la combinaison de 2 éléments parmi 2 défectueux et 4 fonctionnels sans répétition, c'est à dire qu'un seul ordre de combinaison est compté, l'ordre inverse est équivalent. En employant l'analyse combinatoire, abordé plus loin dans le cours;

$$\dim(S) \stackrel{\text{1 seul ordre sur 2 compte}}{=} \frac{A_6^2}{2} = C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{30}{2} = 15$$

$$S = \{(d1,d2),(d1,n1),(d1,n2),(d1,n3),(d1,n4),(d2,n1),(d2,n2),(d2,n3),(d2,n4),(n1,n2),(n1,n3),(n1,n4),(n2,n3),(n2,n4),(n3,n4)\}$$

a/ Le nombre de couple comportant au moins 1 système défectueux simplement dénombré égale 9. On peut aussi le calculer autrement. Si on sélectionne 2 systèmes parmi les 6, on peut choisir successivement d'abord 1, puis 1 fois choisi le premier, 1 second parmi 5 éléments restant. Le nombre de possibilités est donc donné par le produit de 6 et de 5, mais ces arrangements comportent deux ordres équivalents, p.ex D1D2 et D2D1, donc on doit diviser ce nombre par 2. Par ailleurs, il existe 2 possibilités pour que seul 1 des 2 systèmes soit défectueux en combinaison de 4 possibilités pour le second système non défectueux, mais également 1 possibilité pour que les 2 soient simultanément défectueux, donc la probabilité que l'un des 2 au moins soit défectueux est donné par la somme de ces possibilités sur le nombre total de paires de système possible. L'analyse combinatoire (abordé plus loin), conduit évidemment au mêmes résultats.

$$\dim(S) = \dim(X, X) = C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6 * 5}{2} = 15$$

$$\mathbb{P}(E_{D>1}) = \mathbb{P}(E_{D=1} \cup E_{D=2}) = \frac{C_2^1 * C_4^1}{15} + \frac{C_2^2 * C_4^0}{15} = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10}$$

b/ On prend évidemment la 1ère partie de la réponse a/ $\mathbb{P}(E_{D=2}) = \frac{C_2^2 * C_4^0}{15} = \frac{1}{15}$

c/ Dans le cas où 4 systèmes sont défectueux, les proportions sont inverses. Si on choisit 1 système défectueux parmi les 4 et un parmi les 2 fonctionnels, le nombre de possibilité est donné par le produit de 4 et de 2, si on sélectionne simultanément 2 systèmes défectueux, on a 6 possibilités. La probabilité de choisir au moins 1 syst. défectueux est également donnée par la somme de ces possibilités de choix de systèmes défectueux sur l'ensemble des possibles (an. comb.)

$$b/ \mathbb{P}_4(E_{D>1}) = \mathbb{P}_4(E_{D=1} \cup E_{D=2}) = \frac{C_4^1 * C_2^1}{C_6^2} + \frac{C_4^2 * C_2^0}{C_2^1} = \frac{4 * 2}{15} + \frac{6 * 1}{15} = \frac{14}{15}$$

On peut former l'espace d'échantillonnage de S' et constater que la dimension des possibles est effectivement 14 ;

$$S' = \{(d1,d2),(d1,d3),(d1,d4),(d2,d3),(d2,d4),(d3,d4),(d1,n1),(d1,n2),(d2,n1),(d2,n2),(d3,n1),(d3,n2),(d4,n1),(d4,n2),(n1,n2)\}$$

2.34 A retailer sells only two styles of stereo con-
soles, and experience shows that these are in equal
demand. Four customers in succession come into
the store to order stereos. The retailer is inter-
ested in their preferences. a List the possibilities for
preference arrangements among the four customers
(e.g., list the sample space). b Assign probabilities
to the sample points. c Let A denote the event that
all four customers prefer the same style. Find P(A)

2.34 Un détaillant ne vend que 2 modèles de chaînes stéré,
et l'expérience montre que la demande est équivalente pour
ces 2 modèles. 4 clients se succèdent dans le magasin
pour commander des chaînes stéré. Le détaillant est in-
téressés par leurs préférences. a) Énumérez les possibil-
ités de préférences des 4 clients (c.à.d., énumérez l'espace
d'échantillonnage). b) Attribuez des probabilités aux points
de l'espace d'échantillonnage. c) Soit A l'événement « les 4
clients préfèrent le même style ». Calculez P(A).

a) Composons d'abord l'espace d'échantillonnage, qui consiste en la combinaison de 4 éléments constituant le choix des 4 clients, choix parmi les 2 modèles. Chacun pouvant opter pour les 2 modèles, l'ensemble des possibles est donné par $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, comme le montre le dénombrement de l'espace d'échantillonnage. On aurait également pu choisir une alternative et prendre 5 éléments, comportant 0,1,2,3,4 modèle d'une sorte (discuté plus loin)

$S\{(M1, M1, M1, M1), (M2, M1, M1, M1), (M1, M2, M1, M1), (M1, M1, M2, M1), (M1, M1, M1, M2), (M2, M2, M1, M1), (M2, M1, M2, M1), (M2, M1, M1, M2), (M1, M2, M2, M1), (M1, M2, M1, M2), (M1, M1, M2, M2), (M2, M2, M2, M1), (M2, M2, M1, M2), (M1, M2, M2, M2), (M2, M1, M2, M2), t(M1, M2, M2, M4)\}$

$S'\{(M1, M1, M1, M1), (M2, M1, M1, M1), (M2, M2, M1, M1), (M2, M2, M2, M1), (M2, M2, M2, M2)\}$

b) c) Les probabilités individuelles sont de 1 sur 16, ou 1 sur 5 pour l'espace alternatif S'. il n'y a que deux échantillons de 4 clients comportant tous le même choix, comme il n'y a que 2 modèles, il y a alors 2 échantillons possibles. Donc la probabilité est:

$$\mathbb{P}(A_{i,i,i,i}) = \frac{\dim((M1, M1, M1, M1), (M2, M2, M2, M2))}{\dim(S)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

On voit que selon la seconde alternative, la probabilité est beaucoup plus importante (4/10). Mais il faut remarquer que dans l'espace d'échantillonnage S', les éléments ne sont pas équiprobables, c'est un ensemble de regroupement de classes mais pas un espace d'échantillonnage selon la définition. Il est intéressant de montrer que l'on peut regrouper en classes les éléments de l'espace d'échantillonnage représentatifs des possibles, mais cet ensemble ne permet pas de faire de calcul de probabilité détaillé.

2.35 An airline has six flights from New York to California and seven flights from California to Hawaii per day. If the flights are to be made on separate days, how many different flight arrangements can the airline offer from New York to Hawaii?

2.35 Une compagnie aérienne propose six vols quotidiens de New York à la Californie et sept vols quotidiens de Californie à Hawaï. Si les vols doivent être effectués sur des jours différents, combien de combinaisons de vols différentes la compagnie peut-elle proposer entre New York et Hawaï ?

On veut dresser la dimension de l'espace d'échantillonnage de l'événement prendre successivement 2 vol de NY à la Californie et de la Californie au Hawaï. Si les vols pouvaient être effectués le même jour, certaines combinaisons n'auraient pu être possible dans le cas où le second vol est antérieur au premier. Mais dans le cas indiqué, les vols sont effectués en 2 jours, le premier jour on a pour le premier vol 6 points d'échantillonnage et le second 7. Donc pour l'ensemble 42 combinaisons possibles ou points d'échantillonnage pour cet évènement.

2.36 An assembly operation in a manufacturing plant requires three steps that can be performed in any sequence. How many different ways can the assembly be performed?

On veut déterminer le nombre d'ordre possible d'assemblage d'une pièce, sachant qu'il y a éléments et que cet ordre est indifférent à la fabrication de l'objet produit. On a 3 possibilités de choix du premier élément d'assemblage, l'ayant choisi, il ne reste plus que 2 pour le second et enfin 1 pour le dernier. Le nombre de combinaison possible est donc $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. C'est autrement dit une permutation de 3 éléments pris 3 par trois, $P_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6$

2.37 A businesswoman in Philadelphia is preparing an itinerary for a visit to six major cities. The distance traveled, and hence the cost of the trip, will depend on the order in which she plans her route. a How many different itineraries (and trip costs) are possible? b If the businesswoman randomly selects one of the possible itineraries and Denver and San Francisco are two of the cities that she plans to visit, what is the probability that she will visit Denver before San Francisco?

a/ On veut déterminer le nombre d'itinéraire possibles qu'une femme d'affaire peut envisager pour visiter 6 villes sachant que l'ordre de visite est indifférent. On est dans le même cas de figure que dans l'opération d'assemblage (ex 2.36); elle a d'abord 6 possibilités pour le premier déplacement, ensuite 5...etc. Donc le nombre d'itinéraire est donné par 1 arrangement de 6 éléments pris parmi 6 éléments ou permutation de 6 éléments : $A_6^6 = \frac{6!}{(6-6)!} = 6! = P_6$

b/ Etant donné que les deux villes font nécessairement partie des villes qu'elle veut visiter quelques soient les itinéraires, le nombre de ces itinéraires comprend ceux dans lesquels l'ordre de visite est dans un sens ou l'autre, et comme on aimerait connaître la proportion comportant qu'un seul ordre $D < SF$, c'est nécessairement la moitié de l'effectif, donc 0.5 ou la moitié des arrangements possibles.

2.38 An upscale restaurant offers a special fixe prix menu in which, for a fixed dinner cost, a diner can select from four appetizers, three salads, four entrees, and five desserts. How many different dinners are available if a dinner consists of one appetizer, one salad, one entree, and one dessert?

Le nbr. de différents dîners possibles est donné par le produit des nombres de choix de chaque course $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 240$

2.39 An experiment consists of tossing a pair of dice. a Use the combinatorial theorems to determine the number of sample points in the sample space S. b Find the probability that the sum of the numbers appearing on the dice is equal to 7.

2.36 Une opération d'assemblage dans une usine de fabrication nécessite trois étapes qui peuvent être réalisées en n'importe quelle séquence. De combien de façons différentes l'assemblage peut-il être effectué ?

2.37 Une femme d'affaires de Philadelphie prépare un itinéraire pour visiter six grandes villes. La distance parcourue, et donc le coût du voyage, dépendra de l'ordre dans lequel elle planifie son itinéraire a) Combien d'itinéraires différents (et de coûts de voyage) sont possibles ? b) Si la femme d'affaires choisit au hasard l'un des itinéraires possibles et que Denver et San Francisco font partie des villes qu'elle prévoit de visiter, quelle est la probabilité qu'elle visite Denver avant San Francisco ?

2.38 Un restaurant haut de gamme propose un menu à prix fixe spécial dans lequel, pour un prix fixe, un client peut choisir parmi quatre entrées, trois salades, quatre plats principaux et cinq desserts. Combien de dîners différents sont possibles si un dîner comprend une entrée, une salade, un plat principal et un dessert ?

2.39 Une expérience consiste à lancer une paire de dés. a) Utilisez les théorèmes combinatoires pour déterminer le nombre de points d'échantillonnage dans l'échantillon espace S. b) Déterminez la probabilité que la somme des nombres apparaissant sur les dés soit égale à 7.

Le nombre de points d'échantillonnage du lancer de 2 dés est $6*6 = 36$. Pour déterminer la probabilité que la somme des deux nombres égale 7, on doit déterminer la dimension de l'espace d'échantillonnage des sommes des 2 nombres. Sa dimension qui est simplement la même que celle de l'espace du lancer de 2 dés: 36. Sur cet ensemble plusieurs combinaisons donnent le nombre de 7. Pour chaque nombre affiché sur le premier dé, il n'y a qu'un sur le second qui permet d'atteindre cette combinaison, p.ex 1 et 6. Donc en tout 6 possibilités. La probabilité est donc:

$$P_{\Sigma=7} = \frac{\dim(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\})}{6 * 6} = \frac{1}{6}$$

2.40 A brand of automobile comes in five different styles, with four types of engines, with two types of transmissions, and in eight colors. a) How many autos would a dealer have to stock if he included one for each style-engine- transmission combination? b) How many would a distribution center have to carry if all colors of cars were stocked for each combination in part a)?

2.40 Une marque d'automobile se décline en cinq styles différents, avec quatre types de moteurs et deux types de transmissions, et en huit couleurs. a) Combien de voitures un concessionnaire devrait-il avoir en stock s'il en incluait une pour chaque combinaison style-moteur- transmission ? b) Combien de voitures un centre de distribution devrait-il stocker si toutes les couleurs étaient disponibles pour chaque combinaison de la partie a) ?

a)b) Le nombre de combinaison est donné par le produit des variantes des différentes caractéristiques techniques et d'apparence;

$$N_{S,M,T} = 5 * 4 * 2 = 40 \quad N_{S,M,T,C} = 5 * 4 * 2 * 8 = 320$$

2.41 How many different 7-digit telephone numbers can be formed if the first digit cannot be 0?

2.41 Combien de numéros de téléphone différents à 7 chiffres peut-on former si le premier chiffre ne peut pas être 0?

a)b) Le nombre de combinaisons est donné par le produit des différents chiffres admis, le premier ne comportant que 9 chiffres possibles, étant donné que le zéro est exclu;

$$N_{\text{7Tél}} = (10 - 1)^1 * 10^6 = 9 * 10^6$$

2.42 A personnel director for a corporation has hired ten new engineers. If three (distinctly different) positions are open at a Cleveland plant, in how many ways can she fill the positions?

2.42 La directrice des ressources humaines d'une entreprise a embauché dix nouveaux ingénieurs. Si trois postes (distinctement différents) sont à pourvoir dans une usine de Cleveland, de combien de façons peut-elle les pourvoir ?

Parmi les 20 ingénieurs elle peut composer tous les groupes de 3 candidats possibles, c'ad 1 combinaison de 20 dans 3:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20 - 3)!3!} = \frac{20 * 19 * 18}{6} = 1140$$

2.43 A fleet of nine taxis is to be dispatched to three airports in such a way that three go to airport A, five go to airport B, and one goes to airport C. In how many distinct ways can this be accomplished?

2.43 Une flotte de neuf taxis doit être envoyée à trois aéroports de telle sorte que trois aillent à l'aéroport A, cinq à l'aéroport B et un à l'aéroport C. De combien de manières distinctes cela peut-il être réalisé ?

On doit calculer le nombre de façon de partitionner en 3 groupes distincts les 9 taxis.

$$N = \binom{9}{3 \ 5 \ 1} = \frac{9!}{3!5!1!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6}{6} = 504$$

2.44 Refer to Exercise 2.43. Assume that taxis are allocated to airports at random. a If exactly one of the taxis is in need of repair, what is the probability that it is dispatched to airport C? b If exactly three of the taxis are in need of repair, what is the probability that every airport receives one of the taxis requiring repairs?

a) Si les taxis sont aléatoirement affectés aux aéroports, il y a autant de chance que l'aéroport C reçoive un taxi conforme qu'un taxi qui nécessite une réparation. Or l'aéroport C a 9 possibilités de réception de taxis distincts dont l'un serait à réparer, donc la probabilité est donné par : $\mathbb{P}(C)_{R=1} = \frac{1}{9}$

b) On a identiquement pour chaque aéroport 3 taxis à réparer qui peuvent y être affectés sur 9 taxis , donc :

$$\mathbb{P}(A, B, C)_{R=3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2.45 Suppose that we wish to expand $(x + y + z)^{17}$. What is the coefficient of $x^2y^5z^{10}$?

2.45 Supposons que nous souhaitions développer $(x + y + z)^{17}$. Quel est le coefficient de $x^2y^5z^{10}$?

Le coefficient d'un terme réel de développement d'un trinôme au degré n, dont les variables sont à des degrés tels que la somme des degrés égale au coefficient du trinôme, est donné par le nombre façon de partitionner les n éléments parmi les 3 nombres de variables de degrés i définis , c'est le rapport du factoriel de n au produit des factoriels des coefficients des 3 variables, ici ;

$$\frac{n!}{i_x!i_y!i_z!} \left(\mid \sum_{v_i} = n \right) = \frac{17!}{2!5!10!} = 408408.$$

2.46 Ten teams are playing in a basketball tournament. In the first round, the teams are randomly assigned to games 1, 2, 3, 4 and 5. In how many ways can the teams be assigned to the games?

2.46 Dix équipes participent à un tournoi de basketball. Au premier tour, les équipes sont réparties aléatoirement dans les matchs 1, 2, 3, 4 et 5. De combien de façons peut-on répartir les équipes dans ces matchs ?

Il faut deux équipes par match, le premier concurrent peut être choisi parmi les 10 équipes et le second parmi les 9 équipes restantes . Pour chaque match le nombre de combinaison possible de matchs différents est donné par le produit des ces deux valeurs. Si on veut connaître l'ensemble des combinaisons pour une série de n matchs , on doit multiplier ce nombre n fois par lui même; $N_{1M} = C_{10}^1 * C_9^1 = 90$ $N_{nM} = 90^n$

2.47 Refer to Exercise 2.46. If 2n teams are to be assigned to games 1, 2, . . . , n, in howmany ways can the teams be assigned to the games?

2.47 Reportez-vous à l'exercice 2.46. Si 2n équipes doivent être affectées aux matchs 1, 2,..., n, de combien de façons les équipes peuvent-elles être affectées aux matchs ?

$$N_{1M} = C_{2n}^1 * C_{(2n-1)}^1 = 2n * (2n - 1) \quad N_{nM} = (4n^2 - 2n)^n$$

2.48 If we wish to expand $(x + y)^8$, what is the coefficient of x^5y^3 ? What is the coefficient of x^3y^5 ?

2.48 Si l'on souhaite développer $(x + y)^8$, quel est le coefficient de x^5y^3 ? Quel est le coefficient de x^3y^5 ?

Le coefficient d'un terme réel de développement d'un binôme au degré n, dont les variables sont à des degrés tels que la somme des degrés égale au coefficient du trinôme, est donné par le nombre façon de partitionner les n éléments parmi les 2 nombres de variables de degrés i définis, c'est le rapport du factoriel de n au produit des factoriels des coefficients des 2 variables. Les deux exposants des variables polynomiales étant identique, on obtient le même coefficient, fait connu de tout développement multinômiale qui présente une symétrie centrale et caractérise une des propriétés les plus communes des événements statistiques.

$$\frac{n!}{i_x!i_y!} \left(\sum_{v_i} = n \right) = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

2.49 Students attending the University of Florida can select from 130 major areas of study. A student's major is identified in the registrar's records with a two- or three-letter code (for example, statistics majors are identified by STA, math majors by MS). Some students opt for a double major and complete the requirements for both of the major areas before graduation. The registrar was asked to consider assigning these double majors a distinct two- or three-letter code so that they could be identified through the student records' system. a What is the maximum number of possible double majors available to University of Florida students? b If any two- or three-letter code is available to identify majors or double majors, how many major codes are available? c How many major codes are required to identify students who have either a single major or a double major? d Are there enough major codes available to identify all single and double majors at the University of Florida?

2.49 Les étudiants de l'Université de Floride peuvent choisir parmi 130 spécialisations. La spécialisation de chaque étudiant est identifiée dans les dossiers du bureau du registraire par un code de deux ou trois lettres (par exemple, STA pour les statistiques, MS pour les mathématiques). Certains étudiants optent pour une double spécialisation et valident les exigences des deux domaines avant l'obtention de leur diplôme. Le responsable des inscriptions a été invité à envisager d'attribuer à ces doubles spécialisations un code distinct de deux ou trois lettres afin qu'elles puissent être identifiées dans le système de dossiers étudiants. a) Quel est le nombre maximal de doubles spécialisations possibles à l'Université de Floride ? b) Si un code à deux ou trois lettres est disponible pour identifier les spécialisations ou les doubles spécialisations, combien de codes de spécialisation sont disponibles ? c) Combien de codes de spécialisation sont nécessaires pour identifier les étudiants qui ont une seule spécialisation ou une double spécialisation d) Existe-t-il suffisamment de codes majeurs disponibles pour identifier toutes les spécialisations simples et doubles à l'université ?

a) Pour déterminer le nombre de couples de spécialisations possibles, on effectue le produit des 130 spécialisations par (130-1) et divise par 2, on ne peut cumuler 1 même spécialisation et c'est équivalent de choisir dans 1 ordre ou dans l'autre 2 mêmes spécialisations, donc : le nombre max. de double spécialisations est : $C_{130}^2 = \frac{130!}{128!2!} = \frac{130 * 129}{2} = 8385$. b) L'alphabet anglais comporte 26 lettres donc on peut former 676 codes de 2 lettres et 17576 codes de 3l., en tout 18252 c) Le nombre de code représentant les deux cas est une situation statistique de réunion des 2 cas de figures (1s ou 2s), donc c'est la somme des 2 valeurs nécessaires 130+8385=8515. d) S'il n'est pas nécessairement exigé qu'il y ait une relation motivée entre le code en lettre et le terme de la matière de type initiales communes ou selon d'autres critères, on peut créer 18252 codes, ce qui est suffisant à les représenter. Si on se tient au critère d'1 lettre initiale commune et d'1 lettre commune à la désignation et de la seconde lettre de code, il n'est pas certain qu'un code de 2 lettres suffise à les représenter tous, par ex. pour distinguer psychologie, physiologie, philosophie; ps,py,ph, peuvent épuiser les possibilités pour d'autres terminologies orthographiquement proches comme la psychophysiologie et psychopathologie.

2.50 Probability played a role in the rigging of the April 24, 1980, Pennsylvania state lottery (Los Angeles Times, September 8, 1980). To determine each digit of the three-digit winning number, each of the numbers 0, 1, 2, . . . , 9 is placed on a Ping-Pong ball, the ten balls are blown into a compartment, and the number selected for the digit is the one on the ball that floats to the top of the machine. To alter the odds, the conspirators injected a liquid into all balls used in the game except those numbered 4 and 6, making it almost certain that the lighter balls would be selected and determine the digits in the winning number. Then they bought lottery tickets bearing the potential winning numbers. How many potential winning numbers were there (666 was the eventual winner)?

Le numéro gagnant est formé de 3 chiffres. La manipulation des conspirateurs rendent le tirage du 4 et du 6 plus fréquent que la statistique aléatoire le dicte. Les combinaisons gagnantes sont donc potentiellement formées de ces deux chiffres dans leur combinaison. il y a 2 chiffre potentiellement gagnant par numéro tiré, donc l'ensemble de l'échantillonnage est formé de $2 \times 2 \times 2 = 8$ combinaisons gagnantes en tenant compte de l'ordre d'apparition des chiffres. En effet, lorsqu'une boule est tirée, elle est remise dans le dispositif de distribution, donc la probabilité élémentaire pour le tirage de chaque boule est identique et la combinaison totale doit tenir compte de la probabilité élémentaire de chaque tirage individuel. On peut à titre instructif calculer toutes les combinaisons possibles et estimer la probabilité de gain statistique sans cette fraude ;

L'espace d'échantillonnage, sa dimension (numéros gagnants possibles), probabilité statistique non biaisée.

$$S = \{(6, 6, 6), (4, 6, 6), (6, 4, 6), (6, 6, 4), (4, 4, 6), (4, 6, 4), (6, 4, 4), (4, 4, 4)\} \dim(S) = 2^3 = 8$$

$$\dim(T_{x,y,z}) = 10^3 \quad \mathbb{P}(S) = \frac{8}{1000}$$

A titre anecdotique, on peut représenter comme on l'a fait dans d'autres exercices précédents des espaces d'échantillonnages alternatifs , qui n'en sont pas dans le sens de la définition, la probabilité d'apparition de leurs éléments ne sont pas équiprobables, mais représentent les séries de nombres affichées:

$$S' = \{(6, 6, 6), (4, 6, 6), (4, 4, 6), (4, 4, 4)\} \dim(S) = 4$$

2.51 A local fraternity is conducting a raffle where 50 tickets are to be sold—one per customer. There are three prizes to be awarded. If the four organizers of the raffle each buy one ticket, what is the probability that the four organizers win a all of the prizes? b exactly two of the prizes? c exactly one of the prizes? d none of the prizes?

2.50 Les probabilités ont joué un rôle dans la manipulation du tirage de la loterie d'État de Pennsylvanie du 24 avril 1980 (Los Angeles Times, 8 septembre 1980). Pour déterminer chaque chiffre du numéro gagnant à trois chiffres, les chiffres 0, 1, 2, ..., 9 étaient inscrits sur des balles de ping-pong. Les dix balles étaient ensuite projetées dans un compartiment, et le chiffre tiré était celui de la balle qui remontait à la surface. Afin de fausser les probabilités, les conspirateurs ont injecté un liquide dans toutes les balles utilisées, à l'exception de celles portant les numéros 4 et 6, ce qui rendait presque certain que les balles les plus légères seraient sélectionnées et détermineraient les chiffres du numéro gagnant. Ils ont ensuite acheté des billets de loterie comportant les numéros gagnants potentiels. Combien y avait-il de numéros gagnants potentiels (le 666 a finalement remporté le tirage) ?

2.51 Une fraternité locale organise une tombola où 50 billets seront vendus, un par client. Il y a trois prix à gagner. Si les quatre organisateurs de la tombola achètent chacun un billet, quelle est la probabilité que les quatre organisateurs gagnent ? a) Tous les prix ? b) Exactement deux prix ? c) Exactement un prix ? d) Aucun prix ?

a) 3 des 50 billets sont gagnants et les 4 organisateurs achètent chacun 1 billet. Le nombre de billets différents que peuvent acheter les organisateurs est une combinatoire de 50 objets pris 4 à la fois. Le nombre de possibilités absolument gagnants est une combinaison des 3 billets gagnants, 3 billets gagnants pour 3 organisateurs, une combinaison de 3 billets pour les 3, mais il ne faut pas oublier le dernier qui a 47 possibilités, puisque l'on cherche les combinaisons toutes gagnantes, du moment où les 3 premiers ont choisi les billets gagnants le dernier peut indifféremment choisir n'importe lequel des billets restants, cette combinaison à 4 sera toujours gagnante des 3 prix:

$$\mathbb{P}(> 3G) = \frac{C_3^3 * C_{47}^1}{C_{50}^4} = \frac{1 * 47 * 4!}{50 * 49 * 48 * 47} = \frac{1128}{5527200} = \frac{1}{4900} = 0.0002$$

b) c) d) pour la combinaison de 2 prix gagnant, 2 organisateurs auront le choix parmi les 3 billets gagnants et les 2 autres parmi les 47 non gagnants. On procède dans la même logique pour les autres combinaisons:

$$\mathbb{P}(2G) = \frac{C_3^2 * C_{47}^2}{C_{50}^4} = \frac{3 * 47 * 46 * 4!}{2! * 50 * 49 * 48 * 47} = \frac{155664}{11054400} = \frac{69}{4900} = 0.014$$

$$\mathbb{P}(1G) = \frac{C_3^1 * C_{47}^3}{C_{50}^4} = \frac{3 * 47 * 46 * 45 * 4!}{3! * 50 * 49 * 48 * 47} = \frac{149040}{705600} = \frac{207}{980} = \frac{1035}{4900} = 0.211$$

$$\mathbb{P}(0G) = \frac{C_{47}^4}{C_{50}^4} = \frac{47 * 46 * 45 * 44 * 4!}{4! * 50 * 49 * 48 * 47} = \frac{91080}{117600} = \frac{759}{980} = \frac{3795}{4900} = 0.7744$$

On s'attend bien sûr à ce que la probabilité de gagner 1 2 ou 3 prix ainsi qu'aucun soit égale à 1, puisque la réunion des 4 événements la probabilité de choisir n'importe quelle combinaison gagnante ou non ;

$$\mathbb{P}(0G - 3G) = \sum_{i=0}^3 \mathbb{P} = \frac{1 + 69 + 1035 + 3795}{4900} = 1$$

2.52 An experimenter wishes to investigate the effect of three variables—pressure, temperature, and the type of catalyst—on the yield in a refining process. If the experimenter intends to use three settings each for temperature and pressure and two types of catalysts, how many experimental runs will have to be conducted if he wishes to run all possible combinations of pressure, temperature, and types of catalysts?

2.52 Un expérimentateur souhaite étudier l'influence de trois variables (pression, température et type de catalyseur) sur le rendement d'un procédé de raffinage. S'il prévoit d'utiliser trois réglages de température et de pression, ainsi que deux types de catalyseurs, combien d'essais expérimentaux devra-t-il réaliser pour tester toutes les combinaisons possibles de pression, de température et de type de catalyseur ?

Pour déterminer le nombre d'essai l'expérimentateur doit effectuer le produit des possibilités de toutes les variables;

$$N(Essai) = C_3^1 * C_3^1 * C_2^1 = 3 * 3 * 2 = 18$$

2.53 Five firms, $F_1, F_2, \dots, F_5$, each offer bids on three separate contracts, C_1, C_2 , and C_3 . Any one firm will be awarded at most one contract. The contracts are quite different, so an assignment of C_1 to F_1 , say, is to be distinguished from an assignment of C_2 to F_1 . a How many sample points are there altogether in this experiment involving assignment of contracts to the firms? (No need to list them all.) b Under the assumption of equally likely sample points, find the probability that F_3 is awarded a contract.

2.53 Cinq entreprises, $F_1, F_2, \dots, F_5$, soumettent chacune des offres pour trois contrats distincts, C_1, C_2 et C_3 . Chaque entreprise ne pourra remporter qu'un seul contrat. Les contrats étant très différents, l'attribution de C_1 à F_1 , par exemple, sera distinguée de l'attribution de C_2 à F_1 . a Combien y a-t-il au total de points d'échantillonnage dans cette expérience impliquant l'attribution de contrats aux entreprises ? (Inutile de tous les énumérer.) b. En supposant que les points d'échantillonnage soient équiprobables, déterminez la probabilité que F_3 soit attribué.

a) On cherche à connaître le nombre de couple différents d'entreprise contrats, sachant qu'indépendamment il y a 5 entreprise et 3 contrats possible, l'ensemble des points d'échantillonnage est le produit de combinatoires de 5 dans 1 et de 3 dans 1. $\dim(S) = C_5^1 * C_3^1 = 15$ rép. auteur : 60 ?

b) F_3 peut être mandaté pour 3 contrats possible, la probabilité pour F_3 est donc le rapport de 3 à la dimension de l'ensemble d'écahtillonnage. $\mathbb{P}(F_3) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ rép. auteur : $\frac{36}{60}$?

2.54 A group of three undergraduate and five graduate students are available to fill certain student government posts. If four students are to be randomly selected from this group, find the probability that exactly two undergraduates will be among the four chosen.

2.54 Un groupe de trois étudiants de premier cycle et cinq étudiants de cycles supérieurs est disponible pour occuper certains postes au sein du gouvernement étudiant. Si quatre étudiants sont sélectionnés au hasard parmi ce groupe, quelle est la probabilité que deux étudiants de premier cycle exactement fassent partie des quatre choisis

Constituer des groupes de 4 étudiants formés à partir de de 8 étudiants dont 3 étudiants du 1er cycle et de 5 du second consiste à dénombrer les manières de former des groupes de 4 à partir des 8 étudiants , c'est l'ensemble des arrangements possibles fait à partir de 8 éléments simplifié des différents arrangements répétitifs au sein du groupe de 4, puisqu'un arrangement formé dans ce groupe dans un ordre donné équivaut à un arrangement dans un autre ordre et que son nombre est donnée par le factoriel de la dimension du groupe. La simplification permet de dénombrer l'ensemble des arrangements possibles dans un sens. Le nombre de combinaison possible de constitution d'un groupe de quatre étudiant dont 2 exactement sont issu du 1er cycle est donné par le produit de la combinaison possible dans 2 position à partir des 3 étudiants du 1er cycle par la combinaison dans les 2 positions restantes à partir des 5 étudiants restant qui sont du second cycle. La probabilité demandée est le rapport de ces deux nombres;

$$N(8E)_{3,5} = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} \quad N(C_1 = 2)_4 = C_3^2 * C_5^2 \quad \mathbb{P}(C_1 = 2)_4 = \frac{4!4!C_3^2 * C_5^2}{8!} = \frac{3 * 5 * 4}{10 * 7 * 2} = \frac{30}{70}$$

la somme des probabilités respectives d'avoir 0 à 3 étudiants du 1er cycle donne la valeur attendue de 1;

$$\mathbb{P}(C_1 = 0)_4 = \frac{5}{70} \quad \mathbb{P}(C_1 = 1)_4 = \frac{30}{70} \quad \mathbb{P}(C_1 = 2)_4 = \frac{30}{70} \quad \mathbb{P}(C_1 = 3)_4 = \frac{5}{70} \quad \sum_1^3 \mathbb{P}(C_1 = i)_4 = 1$$

2.55 A study is to be conducted in a hospital to determine the attitudes of nurses toward various administrative procedures. A sample of 10 nurses is to be selected from a total of the 90 nurses employed by the hospital. a) How many different samples of 10 nurses can be selected? b) Twenty of the 90 nurses are male. If 10 nurses are randomly selected from those employed by the hospital, what is the probability that the sample of ten will include exactly 4 male (and 6 female) nurses?

a) Une combinaison de 90 infirmiers en groupes de 10 donne le nombre d'échantillons différents de groupe de 10; $N(G10)_{90} = C_{90}^{10} = 5.72 * 10^{12}$

b) L'ensemble des combinaisons de 4 hommes et de 6 femmes sur l'échantillon est donné par le produit de la combinatoire des 20 en 4 homme et de celle de 80 infirmières en 6 femmes. La probabilité demandée est alors le rapport de ce nombre par le nombre de combinaison de groupe de 10 infirmiers formés à partir des 90;

$$N(4H6F)_{90} = C_{20}^4 * C_{80}^6 \quad \mathbb{P}(4H6F)_{10} = \frac{C_{20}^4 * C_{80}^6}{C_{90}^{10}} \approx 0.11$$

2.56 A student prepares for an exam by studying a list of 10 problems. She can solve 6 of them. For the exam, the instructor selects 5 probl. at random from the ten on the list given. What's the probab. the student can solve all 5 probl. on the exam?

2.56 Une étudiante se prépare à un examen en étudiant une liste de 10 problèmes. Elle peut en résoudre 6. Pour l'exa., le professeur choisit 5 problèmes au hasard parmi les dix figurant sur la liste donnée. Quelle est la probabilité que l'étudiant parvienne à résoudre les 5 probl. ?

La probabilité que l'étudiante puisse résoudre les 5 problèmes est donnée par le produit de l'ensemble des combinaisons possibles de 5 questions à partir des 6 problèmes qu'elle est capable de résoudre et de la combinatoire de 4 sur aucun sur l'ensemble des combinaisons possibles de 5 questions formés à partir des 10. $\mathbb{P}(R5)_5 = \frac{C_6^5 * C_4^0}{C_{10}^5} = \frac{1}{42}$

On peut calculer les probabilités respectives de résolution de 0 à 5 problèmes de la même manière ;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R0)_5 &= \frac{C_6^0 * C_4^5}{C_{10}^5} = 0 & \mathbb{P}(R1)_5 &= \frac{C_6^1 * C_4^4}{C_{10}^5} = \frac{6}{252} & \mathbb{P}(R2)_5 &= \frac{C_6^2 * C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{60}{252} & \mathbb{P}(R3)_5 &= \\ \frac{C_6^3 * C_4^2}{C_{10}^5} &= \frac{120}{252} & \mathbb{P}(R4)_5 &= \frac{C_6^4 * C_4^1}{C_{10}^5} = \frac{60}{252} & \mathbb{P}(R5)_5 &= \frac{C_6^5 * C_4^0}{C_{10}^5} = \frac{6}{252} & \sum_{i=0}^5 \mathbb{P}(Ri)_5 &= 1 \end{aligned}$$

En effet, statistiquement elle peut résoudre 6/10 probl. et donc être incapable d'en résoudre 4, la prob. qu'elle ne résolve aucun des 5 est nulle, puisqu'elle peut au moins en résoudre 1. La somme de ces prob. donne 1, comme attendu.

2.57 2 cards are drawn from a 52-card playing deck. What's the prob. that draw will yield an ace & face card?

2.57 On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes standard. ? est la probab. que le tirage donne 1 as & 1 figure ?

C'est le rapport du produit des combinaisons possibles d'as et de figure respectivement tirés dans l'un et l'autre cas élémentaire sur l'ensemble des combinaisons possible de 2 cartes parmi 52. $\mathbb{P}(AF)_2 = \frac{C_4^1 * C_{12}^1}{C_{52}^2} = \frac{8}{221} = 0.036$

2.58 Five cards are dealt from a standard 52-card deck. What is the probability that we draw a 3 ace and 2 kings? b a “full house” (3 cards of one kind, 2 cards of another kind)? **2.58 On distribue cinq cartes d’un jeu standard de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer 5 cartes ? a) 3 as et 2 rois ? b) un « full » (3 cartes d’une même valeur, 2 cartes d’une autre valeur) ?**

a/ Le calcul probabiliste suit la même logique (v.ex 2.57)
$$\mathbb{P}(3A2R)_5 = \frac{C_4^3 * C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{1}{108290} = 9.23 * 10^{-6}$$

b/ Un jeu de cartes comprend 13 cartes de valeurs différentes et de 4 couleurs différentes. Pour former toutes les combinaisons de 3 valeurs identiques, on effectue le produit des 13 valeurs possibles et de la combinaisons en groupe de 3 valeurs identiques à partir des 4 couleurs différentes. On obtient ainsi toutes les combinaisons possible pour former le triplet gagnant du full. Il faut ensuite combiner cette valeur avec celles de toutes les possibilités de cartes de valeurs différentes pour les deux cartes distinctes restantes à tirer. Comme 3 cartes sont déjà affectées à la formation du triplet et que la 4ème de même valeur ne peut figurer dans la main full, il reste donc 48 cartes qui peuvent potentiellement être disponible pour la 4ème et 5ème cartes, donc un nombre de combinaison de 2 cartes à partir des 48 restantes. . Le nombre de combinaisons possible pour former 5 cartes à partir des 52 cartes est donné par la combinatoire de 52 dans 5. On obtient alors la probabilité attendue par le rapport de ces 2 nombres;

$$\mathbb{P}(3X - Y - Z)_5 = \frac{13 * C_4^3 * C_{48}^2}{C_{52}^5} = \frac{9}{1190} = 0.0075$$

Calculons à titre comparatif la probabilité de tirer 3 cartes d’une même couleur avec deux cartes de couleurs différentes. On compare une probabilité similaire sur 13 cartes de même couleur contre 4 cartes de même valeur, donc on s’attend à ce que cette probabilité soit de l’ordre de 3 X plus grande, en effet:

$$\mathbb{P}(3C_x - C_y - C_z)_5 = \frac{C_{13}^3 * C_{39}^2}{C_{52}^5} = \frac{26.5}{1190} = 0.022$$

2.59 Five cards are dealt from a standard 52-card deck. What is the probability that we draw a 1 ace, 1 two, 1 three, 1 four, and 1 five (this is one way to get a “straight”)? b any straight? **2.59 On distribue cinq cartes d’un jeu standard de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer 5 cartes ? a) 1 as, 1 deux, 1 trois, 1 quatre et 1 cinq (c’est une façon d’obtenir une « suite ») ? b) N’importe quelle suite ?**

a/ Le calcul probabiliste suit la même logique que celui de l’ex. précédent ;

$$\mathbb{P}(A2345)_5 = \frac{C_4^1 * C_4^1 * C_4^1 * C_4^1 * C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{(C_4^1)^5}{C_{52}^5} = \frac{1024}{2598960} = 3.94 * 10^{-4}$$

b/ Les suites de 5 sont l’ensemble de quintuplets tels que leur valeur se suivent par un incrément de 1. Prenons la 1ère suite, comme il y a 4 couleurs différentes, il en existe 4⁵ combinaisons possibles, et d’autant pour la suivante et ainsi de suite. Le nombre de suite par couleur est limité par la valeur la plus basse de la suite la plus forte, celle-ci ne peut être supérieur à 10, puisque cette suite est formée des cartes allant de 10 à l’as et c’est la dernière. Donc le nombre de suites possibles est donné par 10 * 4⁵. La probabilité d’une suite quelconque est donc :

$$\mathbb{P}(Xi - Xi + 5)_5 = \frac{10 * C_4^1 * C_4^1 * C_4^1 * C_4^1 * C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{10240}{2598960} = 3.94 * 10^{-3}$$

Remarque si on considère que le quintuplet 10 à l’as n’est pas une suite , alors la probabilité :

$$\mathbb{P}(Xi - Xi + 5)_5 = \frac{9 * 1024}{C_{52}^5} = \frac{9216}{2598960} = 3.546 * 10^{-3} \quad = \text{rép. auteur: } 0.00355$$

2.60 Refer to Example 2.7. Suppose we record the birthday for each of n randomly selected persons. a) Give an expression for the probability that none share the same birthday. b) What's the smallest value of n so that the probability is at least .5 that at least 2 people share a birthday?

2.60 (V. exemple 2.7). Supposons que nous enregistrons la date d'anniversaire de n personnes sélectionnées aléatoirement. a) Donnez 1 expression pour la prob. qu'aucune personne ne partage le même anniversaire. **Quelle est la plus petite valeur de n pour que la probabilité soit d'au moins 0,5 qu'au moins 2 personnes partagent le même anniversaire ?**

Question & calc. difficile v. fin Brouillon

a/ Puisque chacun peut être né un des 365 jours, l'ensemble des combinaisons possibles de dates est donné par un nombre de fois le produit de 365 par lui-même, donc 365^n . Pour $n = 365$ il n'y a qu'1 arrangement possible tel que tous aient des dates distinctes. Lorsque $n < 365$ il y a plus d'1 possibilité de combinaisons de dates différentes, le 1er dispose de 365 différentes, le second dispose d'1 jour de moins, etc..., donc :

$$\mathbb{P}(22) = 0.52 \quad \mathbb{P}(23) = 0.49$$

$$\mathbb{P}(Nd_{i \neq j})_{365} = \frac{\overbrace{365 * 364 * 363 \dots}^n}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!} = \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

b/ La probabilité qu'aucune personne ne partage le même anniversaire a sa valeur max. virutelle pour $n = 1$; à partir de 2 pers, elle ne peut être = 1 et diminue très lentement avec n , elle est de 0.5 à $n \approx 22.5$ correspondant toujours au nombre limite de pers. avec différences absolues de dates, et tend vers 0 pour n tendant vers 365 *.

$$* \mathbb{P}(N = 365d_{i \neq j})_{365} = \frac{365!}{(365^{365} 0!)} \stackrel{\text{appr. de Stirling}}{=} \frac{\sqrt{2\pi 365} \cdot 365^{365}}{(e^{365} 365^{365})} = 10^{-157}$$

Le complémentaire à 1 de la probabilité qu'aucune personne ne partage le même anniversaire caractérise justement la probabilité d'avoir au moins 1 couple de personnes partageant la même date et

$$\mathbb{P}(d_i = d_j \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N = 365d_{i \neq j})_{365} \geq 0.5 \Rightarrow \mathbb{P}(N = 365d_{i \neq j})_{365} \leq 0.5 \Rightarrow \frac{A_{365}^n}{365^n} \leq 0.5.$$

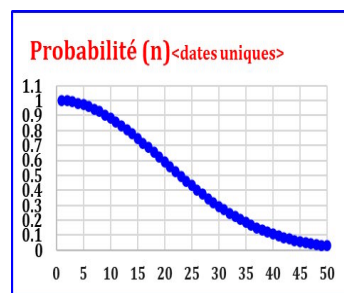
$$\mathbb{P} = \frac{365!}{365^n (365 - (n - 1)!)} = \frac{365!}{365^n (365 - n + 1)!} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 * 365! \leq 365^n (365 - n + 1)! \quad \text{OR,}$$

$$F! \approx \sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F \Rightarrow \ln(F!) \approx \ln\left(\sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F\right) = \frac{1}{2} \ln(2\pi F) + F \ln(F) - F \Rightarrow \ln(2 * 365!) \approx 1793.0$$

$$1793 \lesssim n \ln(365) + 1/2 \ln(2\pi(365 - n + 1)) + (365 - n + 1)(\ln(365 - n + 1) - 1) \Rightarrow$$

$$n^2 - n - 506 \gtrsim 0.5 \Rightarrow \begin{cases} n \gtrsim 23 \\ n \gtrsim 22? \end{cases}$$

On avait trouvé avec le tableur en faisant varier la valeur de n à plus de 50 n autour de 22.5, étant donné que la probabilité d'avoir au moins 2 pers. de même anniversaire est $1 - 0.492 > 0.5$ pour $n = 23$, donc n minim. est bien 23.



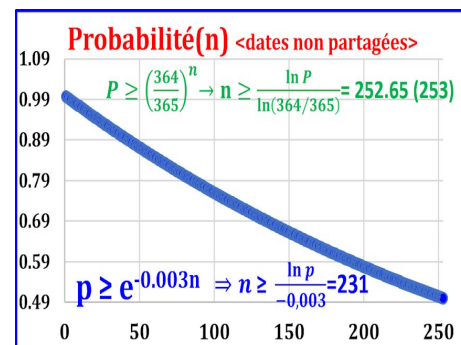
2.61 Suppose that we ask n randomly selected people whether they share your birthday. a Give an expression for the prob. that no 1 shares your birthday (ignore leap years). b How many people do we need to select so that the prob. is at least .5 that at least one shares your birthday?

2.61 Supposons que nous demandions à n personnes sélectionnées au hasard si elles partagent votre anniversaire. a) Donnez 1 expression pour la probabilité que personne ne partage votre anniversaire (ignorez les années bissextiles). b) Combien de personnes faut-il sélectionner pour que la prob. qu'au moins 1 personne partage votre anniversaire soit d'au moins 0,5 ?

a/On se trouve ici dans une problématique un peu différente de l'exercice précédent. La première position étant réservée, la procédure s'applique aux n personnes sur les 364 dates restantes ; une date sur 365 est réservé à mon anniversaire, donc la possibilité combinatoire pour les autres personnes est donnée par la combinaison de n nombres de fois les 364 dates disponibles pour chacun des n personnes, c'est à dire 364 puissance n . Et la combinaison possible de toutes dates donnée par 365 puissance n , donc la probabilité est :

$$\mathbb{P}(Nd_{1 \neq i})_{365} = \frac{364^n}{365^n} = \left(\frac{364}{365}\right)^n = 0.997^n$$

Dans cette situation la dégression de la probabilité en fonction du nombre de personne est beaucoup plus lente, dans l'exercice précédent, on avait calculé la probabilité qu'aucune personne ne partage sa date, dans le produit du numérateur les termes progressifs différaient successivement d'1 unité par diminution, or ici ils sont tous égaux à 364 puisque les personnes ont l'exclusivité d'1 seule date mais non celles qu'elles pourraient partager entre elle. Et donc pour atteindre la probabilité de 0.5 dans la condition que personne ne partage ma date est bien plus important; estimé à >252, par calcul et 231 par approximation du graphique tableur.



b/Le complémentaire à 1 de la probabilité qu'aucune personne ne partage mon anniversaire caractérise justement la probabilité d'avoir au moins 1 personne née à la même date que moi, avec

$$\mathbb{P}(N_{d1=i>2})_{365} = 1 - \mathbb{P}(N_{d1 \neq i})_{365} \gtrsim 0.5 \Rightarrow \mathbb{P}(N_{d1 \neq i})_{365} = \left(\frac{364}{365}\right)^n \lesssim 0.5 \xrightarrow{n * \ln(0.997) \lesssim \ln(0.5)} n \gtrsim 253 (252.35).$$

Rép. de l'auteur 0.5005 ; certainement 1 erreur, cette valeur correspond en effet 1 - P(0) tel que P(0) > 0.5

2.62 A manufacturer has nine distinct motors in stock, 2 of which came from a particular supplier. The motors must be divided among 3 production lines, with 3 motors going to each line. If the assignment of motors to lines is random, find the probability that both motors from the particular supplier are assigned to the 1st line. **2.62 Un fabricant a en stock neuf moteurs différents, dont 2 proviennent d'un fournisseur particulier. Les moteurs doivent être répartis sur 3 lignes de production, à raison de 3 moteurs par ligne. Si cette répartition est aléatoire, quelle est la probabilité que les 2 moteurs d'un même fournisseur soient affectés à la 1ère ligne ?**

Chacun des 2 moteurs provenant du même fabricant a la même probabilité de se trouver dans l'une des 3 lignes, le couple peut de manière équiprobable se retrouver dans les 3 lignes. Dans ce cas de figure on se trouve dans l'analyse combinatoire de répartition d'objets dans un nombre de sous-ensembles donnés. Le nombre d'arrangements possibles pour les 9 moteurs de se retrouver dans les 3 lignes est donné par: $N = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$

En effet, le premier moteur a de manière absolue 9 positions possibles, laissant au second 8 places et ainsi de suite, donc l'ensemble des arrangements est 9!. Mais comme les moteurs sont distribués dans les 3 lignes, dans chacune le premier a 3 positions possibles, le second 2 et le dernier 1, donc 3! permutation qui représente le nombre d'arrangement pour les 3 mêmes moteurs, comme on cherche les combinaison distinctes, on doit diviser l'ensemble des arrangements des 9 moteurs par 3!; arrangement représentant les 3 mêmes moteurs afin de ne pas les compter de manière redondante 3! fois et en répétant cette opération encore 2 fois pour les 2 autres sous-ensembles.

Le nombre d'arrangements possibles formés par la combinaison du couple dans la première ligne est simplement donnée par le rapport de toutes les permutations possibles des 7 moteurs restants sur le produit de la combinaison de 3 permutations des éléments pour la seconde et la troisième ligne en raison du raisonnement précédent, le premier sous-ensemble n'ayant qu'un élément, de manière indifférente il n'y a pas lieu d'exclure une permutation de 1 dans 1, puisqu'il n'y a qu'un arrangement possible. En effet, on peut considérer que le couple de moteur a 2 positions fixées dans l'arrangement, donc l'ensemble des possibles à cette condition est formé par l'ensemble des arrangements possibles à partir des 7 moteurs restants. La probabilité attendu est finalement le rapport de ce nombre par l'ensemble des arrangements formé des 9 moteurs en 3 groupes de 3.

$$N \frac{7!}{1!3!3!} = \frac{7!}{3!3!} = 140 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{140}{1680} = 0.0833.$$

2.63 The eight-member Human Relations Advisory Board of Gainesville, Florida, considered the complaint of a woman who claimed discrimination based on sex, on the part of a local company. The board, composed of 5 women and 3 men, voted 5–3 in favor of the plaintiff, the five women voting in favor of the plaintiff, the three men against. The attorney representing the company appealed the board’s decision by claiming sex bias on the part of the board members. If there was no sex bias among the board members, it might be reasonable to conjecture that any group of 5 board members would be as likely to vote for the complainant as any other group of 5. If this were the case, what is the probability that the vote would split along sex lines (5 women for, 3 men against)?

Le problème est analogue à celui de l’exercice précédent. On doit constituer d’abord l’ensemble des arrangements possibles de 8 membres dans 2 sous-ensembles favorables ou non à la plaignante indifféremment de leur sexes, ce qui représente l’ensemble des combinaisons aléatoires de 8 membres. De cet ensemble on doit supprimer les répétitions pour les deux sous-ensemble de 5! et de 3!, puisqu’on doit distinguer les votes favorables aux non favorables, dans chaque sous-ensemble les différents arrangements des mêmes personnes ne comptent qu’une fois. Sur cet ensemble, un seul arrangement non répétitif concerne le cas litigieux, donc la probabilité est le rapport des deux ;

$$\mathbb{P}(5F_f - 3H_c) \frac{1}{\frac{8!}{5!3!}} = \frac{5!3!}{8!} = \frac{1}{56} = 0.0178.$$

2.64 A balanced die is tossed six times, and the number on the uppermost face is recorded each time. What is the probability that the numbers recorded are 1, 2, 3, 4, 5, and 6 in any order?

A chaque lancer de dé, on a 6 possibilités d’apparition des 6 chiffres, donc l’ensemble des combinaisons possibles est donné par 6 multiplié par lui-même 6 fois. On recherche par ailleurs le nombre de combinaisons de 6 chiffre contenant exactement 1 des 6 chiffre, ce qui est donné par 6! , le nombre de permutations de ces 6 chiffres ou arrangement de 6 chiffres tous différents. Donc la probabilité recherchée est le rapport des deux ;

$$\mathbb{P}(6) \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324} = 0.01543.$$

2.65 Refer to Exercise 2.64. Suppose that the die has been altered so that the faces are 1, 2, 3, 4, 5, and 5. If the die is tossed five times, what is the probability that the numbers recorded are 1, 2, 3, 4, and 5 in any order?

2.63 Le comité consultatif des relations humaines de Gainesville, en Floride, composé de huit membres, a examiné la plainte d’une femme qui alléguait avoir été victime de discrimination fondée sur le sexe de la part d’un employeur local. Dans une affaire concernant une entreprise, le conseil d’administration, composé de 5 femmes et de 3 hommes, a voté à 5 contre 3 en faveur de la plaignante (les 5 femmes ayant voté pour, les 3 hommes contre). L’avocat de l’entreprise a interjeté appel de cette décision, invoquant un parti pris sexiste de la part des membres du conseil. En l’absence de parti pris sexiste, on pourrait raisonnablement supposer que n’importe quel groupe de 5 administrateurs aurait autant de chances de voter pour la plaignante que n’importe quel autre groupe de 5. Dans ce cas, quelle est la probabilité que le vote se divise selon le sexe (5 femmes pour, 3 hommes contre) ?

2.64 On lance un dé équilibré six fois et on note le nombre obtenu sur la face supérieure à chaque lancer. Quelle est la probabilité d’obtenir les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dans n’importe quel ordre ?

2.65 Reportez-vous à l’exercice 2.64. Supposons que le dé ait été modifié de sorte que ses faces soient 1, 2, 3, 4, 5 et 5. Si le dé est lancé cinq fois, quelle est la probabilité que les nombres enregistrés soient 1, 2, 3, 4 et 5 dans n’importe quel ordre ?

On a ici identiquement à chaque lancer de dé, 6 possibilités d'apparition de 6 chiffres, dont 2 sont identiques, donc l'ensemble des combinaisons possibles est donné par 6 multiplié par lui-même 5 fois, desquels il faut décompter la répétition de 5 deux fois, puisque l'arrangement concerne les 6 dés, mais que seules leurs valeurs comptent dans la probabilité dont 2 valeurs identiques, donc à diviser par 2! On recherche par ailleurs le nombre de combinaisons possibles des 5 chiffres contenant exactement les 5 différents chiffres, ce qui est donné par l'ensemble de permutations 5 chiffres, donc 5! La probabilité recherchée est le rapport des deux ;

$$\mathbb{P}_{(5/6)} = \frac{5!}{\frac{6^5}{2!}} = 2 \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{162} = 0.0308.$$

2.66 Refer to Example 2.10. What is the probability that a/ an ethnic group member is assigned to each type of job? b/ no ethnic group member is assigned to a type 4 job?

2.66 Se référer à l'exemple 2.10. Quelle est la probabilité que a) Un membre du groupe ethnique soit affecté à chaque type d'emploi ? b) Aucun membre du groupe ethnique ne soit affecté à un emploi de type 4 ?

Dans l'exemple 2.10 20 ouvriers étaient répartis sur 4 chantiers avec des besoins respectifs en nombres de 6, 4, 5 et 5. Les 4 membres d'un même groupe ethnique avaient été affectés au 1er chantier et ce qui constituait le motif du conflit de répartition non aléatoire avec la nécessité de déterminer la justification de cette répartition par un comité de médiation. On cherche ici donc de déterminer a) la probabilité que chacun d'entre eux soit réparti à un seul des 4 chantiers. On calcule d'abord le nombre d'arrangements possible des 20 ouvriers dans les 4 groupes composés de ces nombres limites. C'est à dire l'ensemble des permutations possible de 20 pour former toutes les combinaisons ordonnées possibles desquelles on déduit les permutations qui représentent des répétitions d'arrangement p-tuple dans le même sous-groupe afin de ne les pas compter p-tuple fois en redondance. Ensuite le nombre d'arrangement qui nous intéresse est celui de 16 ouvriers restant, puisque l'on a l'indication que chaque membre du groupe ethnique se réserve assurément une place dans chaque groupe, à répartir dans les 4 chantiers et ici encore en divisant par le nombre de combinaisons répétitives qui sont données par les factoriels des nombres de places disponibles aux ouvriers non issus du groupe ethnique. Le rapport de ces deux nombres est la probabilité recherchée

$$\mathbb{P}_{(4E/4chant)} = \frac{\frac{16!}{(6-1)!(4-1)!(5-1)!(5-1)!}}{\frac{20!}{6!4!5!5!}} = \frac{\frac{16!}{5!3!4!4!}}{\frac{20!}{6!4!5!5!}} = \frac{5}{969} = 0.00516.$$

2.67 Refer to Example 2.13. Suppose that the number of distributors is M = 10 and that there are n = 7 orders to be placed. What is the probability that *a all of the orders go to different distributors? *b distributor I gets exactly 2 orders and distributor II gets exactly 3 orders? *c distributors I, II, and III get exactly 2,3 and 1 order(s), respectively?

2.67 Se référer à l'exemple 2.13. Supposons que le nombre de distributeurs soit M = 10 et qu'il y ait 7 commandes à passer. Quelle est la probabilité que... Toutes les commandes soient envoyées à des distributeurs différents ? *b Le distributeur I reçoit exactement 2 commandes et le distributeur II en reçoit exactement 3? *c Les distributeurs I, II et III reçoivent respectivement exactement 2,3 et 1 commandes ?

a) Dans l'exemple 2.13, on examinait la probabilité qu'un distributeur parmi M distributeurs reçoive k commandes parmi n commandes avec n < M, de sorte que le choix de distributeur et la distribution du nombre de commandes parmi les M distributeurs soient totalement équiprobables et aléatoires . On avait vu qu'il y avait M distributeurs possible pour chaque commande, et le nombre de manière de passer la commande est donné par M multiplié par lui-même n fois. Ce qui représente l'arrangement de toutes les combinaisons possible de commandes par distributeur.

L'ensemble des possibles qui caractérise toutes les commandes envoyées à des distributeurs différents nécessite, puisque le nombre de commande est inférieur au nombre de distributeur, qu'aucun distributeur ne reçoit plus d'une commande. Donc nécessairement les 7 commandes soient attribuées à 7 distributeurs parmi 10 et que 3 distributeur ne reçoivent aucune commande. Ce nombre s'obtient par le produit de l'arrangement de 10 dans 7 qui est le nombre possible de 7 commandes parmi les 10 distributeurs multiplié par le nombre des 3 distributeurs restant le nombre de fois de commandes restante c'est à dire 0. La probabilité recherchée est le rapport des deux nombres:

$$\mathbb{P}_{(7/10 \quad cM_i \leq 1)} = \frac{A_{10}^7 * (10 - 7)^{7-7}}{10^7} = \frac{10! * 3^0}{(10 - 7)!10^7} = \frac{10!}{3!10^7} = 0.06048.$$

a') Une alternative à la résolution de ce problème consisterait à exclure parmi l'ensemble des manières dont les 7 commandes sont réparties parmi les 10 distributeurs, les arrangements répétitifs équivalents, ce sont les 7! permutations équivalentes parmi les 7 commandes qu'il faut diviser sur l'ensemble des combinaisons possibles. De même, des arrangements répartis parmi les 10 distributeurs des 7 commandes comportent également 7! permutations répétitives qui représentent les combinaisons équivalentes dont il faut supprimer de l'ensemble, donc on obtient de manière équivalente:

$$\mathbb{P}_{(7/10 \quad cM_i \leq 1)} = \frac{C_{10}^7 * (10 - 7)^{7-7}}{\frac{10^7}{7!}} = \frac{10! * 3^0}{(10 - 7)!7!10^7} = \frac{10!}{3!10^7} = 0.06048.$$

b) On exploite le raisonnement appliqué à la 1ère question pour répondre à celle-ci. Ici seul le numérateur change, on doit multiplier l'ensemble des combinaison d'arrangements de 2,3 et les 2 commandes restantes sur 7 parmi les 2 distributeurs et respectivement 8 restant. Donc, il y a 2 commandes attribuées au 1er distributeur parmi les 7 de 2 façons, une combinatoire de 7 dans 2, de même pour le second avec 5 et 3. Il reste ensuite 10-2 distributeurs qui peuvent se combiner entre eux dans n'importe quel ordre d'arrangement pour les 2 dernières commandes, par ex D1D2, D2D1... etc., donc ici également il faut multiplier le nombre de distributeur restant par lui même 1 fois puisqu'il ne reste que (7-5) commandes à partager.

$$\mathbb{P}_{(5/10 \quad cM_1=2, cM_2=3)} = \frac{C_7^2 * C_5^3 * (10 - 2)^{7-5}}{10^7} = \frac{\frac{7!}{5!2!} \frac{5!}{2!3!} 8^2}{10^7} = \frac{21}{15625} = 0.001344.$$

c) On fait exactement le même raisonnement que pour le point précédent

$$\mathbb{P}_{(5/10 \quad cM_1=2, cM_2=3)} = \frac{C_7^2 * C_5^3 * C_2^1 * (10 - 3)^{7-6}}{10^7} = \frac{\frac{7!}{5!2!} \frac{5!}{2!3!} \frac{3!}{1!2!} 7^1}{10^7} = \frac{147}{500000} = 0.000294.$$

2.68 Show that, for any integer $n \geq 1$,

a $\binom{n}{n} = 1$. Interpret this result.

b $\binom{n}{0} = 1$. Interpret this result.

c $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-r}$. Interpret this result.

d $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$. [Hint: Consider the binomial expansion of $(x + y)^n$ with $x = y = 1$.]

2.68 Montre que pour tout entier $n \geq 1$,

a $\binom{n}{n} = 1$. Interprète ce résultat.

b $\binom{n}{0} = 1$. Interprète ce résultat.

c $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-r}$. Interprète ce résultat.

d $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$. [Indication: Considère le développement binomial de $(x + y)^n$ with $x = y = 1$.]

a Il n'y a qu'une seule combinaison de n objets pris n à la fois, autrement dit un ensemble d'arrangement de n éléments pris n à la fois desquels on supprime n factoriel combinaisons répétitives pour ne former qu'une combinaison d'éléments tous différents. Par exemple la combinaison de 4 éléments de $S = \{S1, S2, S3, S4\}$ est la série S1,S2,S3,S4 unique équivalente à S2,S1,S3,S4 ou S1,S4,S2,S3 ...etc

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1$$

b L'ensemble de n combinaisons d'objets pris 0 à la fois ne peut pas être égale à 0; pour des raisons de logique mathématique lorsqu'il ne reste plus d'éléments de sous-ensemble qui interviennent dans un produit de combinatoires à défaut de fausser le résultat, seul le nombre 1 répond au résultat produit de deux combinatoires dont l'une est négligée donc =1, ce raisonnement s'applique également pour 0! qui est égale à 1

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$$

c La première combinatoire est l'ensemble de n combinaisons d'objets pris r à la fois et la seconde pris théoriquement n-r à la fois, mais comme ces combinaisons sont des arrangements dequels on élimines respectivement les (n-r)! et r! de permutations répétitives on obtient le même résultat :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)} = \frac{n!}{n-(n-r)!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$$

d En posant pour x et y égale à 1 dans le polynôme binomial de Newton, on obtient

$$(x+y)^n \stackrel{x=y=1}{=} 2^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

$$2^n = \binom{n}{0}1^n 1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \dots + \binom{n}{n-1}1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^0 1^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

2.69 Prove that

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

2.69 Prouvez que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} =$$

il est plus simple de procéder dans le sens inverse:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\ &\stackrel{n-k+1! \Leftrightarrow (n-k+1)(n-k)!}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!} \\ &\stackrel{k! \Leftrightarrow k(k-1)!}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \left(\frac{n!}{k} + \frac{n!}{n-k+1} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \left(\frac{(n+1)n!}{nk-k^2+k} \right) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-k)!k!(n-k+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \Leftrightarrow \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

2.70 Consider the situation where n items are to be partitioned into $k < n$ distinct subsets. The multinomial coefficients $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ provide the number of distinct partitions where n_1 items are in group 1, n_2 are in group 2, . . . , n_k are in group k . Prove that the total number of distinct partitions equals k^n . [Hint: Recall Exercise 2.68(d).]

En employant la formule du multinôme avec les x_i tous égaux à 1, on obtient que le nombre total de partitions égale à la valeur attendue:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_k)_{x_i=1}^{x_i=1} k^n &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k} \\ &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots} 1^{n_1} 1^{n_2} 1^{n_3} \dots 1^{n_k} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots} = k^n \end{aligned}$$

COMPLÉMENT: NOMBRE DE COEFFICIENTS Les coefficients multinômiaux sont les coefficients du développement en série de la puissance n d'une somme de k variables. Pour $n=2$, le développement du multinôme est donné par la somme des carrés des k variables, donc k coefficients, plus l'ensemble des combinaisons de deux variables distincts multiplié par 2, donc le nombre de combinaison de k pris de par 2. Pour n successivement >2 , comme le développement est donné par le produit de la somme obtenu par la somme du monôme de k variable, le nombre obtenu est multiplié par k fois le nombre de variable du monôme. On peut ainsi calculer le nombre de coefficients. Lorsque le degré du multinôme tend vers l'infini on approche étonnement de la même valeur que le nombre de partitions distinctes:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_k)^2 (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_k) = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 + \overbrace{2x_1x_2 + 2x_1x_3 \dots}^{(k)} \right) \overbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_k)}^k$$

$$N_C^3 = \left(k + \binom{k}{2} \right) * k = k \left(k + \frac{k!}{(k-2)!2!} \right) = k \left(\frac{k(k-2)!2! + k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} \right) = k^2 \frac{2! + (k-1)}{2!}$$

$$N_C^3 = k^2 \frac{2! + (k-1)}{2!} \quad N_C^n = \overbrace{k(k(k \dots}^{n-2} \left(k + \binom{k}{2} \right) = k^{n-2} k \left(\frac{2! + (k-1)}{2!} \right) = k^{n-1} + \frac{k^{n-1}(k-1)}{2}$$

$$N_C^n = \frac{2k^{n-1} - k^{n-1} + k k^{n-1}}{2} = \frac{k^{n-1} + k^n}{2} = \frac{k^n + k^{n+1}}{2k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_C^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n + k^{n+1}}{2k} = \frac{k^{n+1} + k^{n+1}}{2k} = \frac{2k^n}{2} = k^n$$

2.71 If two events, A and B, are such that $\mathcal{P}(A) = 0.5$, $\mathcal{P}(B) = 0.3$, and $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$, find the following:

- $\mathcal{P}(A|B)$
- $\mathcal{P}(B|A)$
- $\mathcal{P}(A|A \cup B)$
- $\mathcal{P}(A|A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \cap B|A \cup B)$

2.70 Considérons le cas où n éléments doivent être répartis en $k < n$ sous-ensembles distincts. Les coefficients multinomiaux $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ fournissent le nombre partitions distinctes où n_1 éléments appartiennent au groupe 1, n_2 au groupe 2, ..., n_k au groupe k . Prouvez que le nombre total de partitions distinctes est égal à k^n . [Indication : Voir l'exercice 2.68(d).]

2.71 Si deux événements, A et B, sont tels que $\mathcal{P}(A) = 0.5$, $\mathcal{P}(B) = 0.3$, et $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$, trouvez :

- $\mathcal{P}(A|B)$
- $\mathcal{P}(B|A)$
- $\mathcal{P}(A|A \cup B)$
- $\mathcal{P}(A|A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \cap B|A \cup B)$

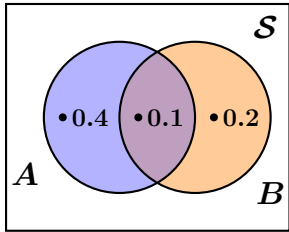
$$a \mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = \mathcal{P}(A) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$

$$b \mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{10} = \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$

$$c \mathcal{P}(A|(A \cup B)) = \frac{\mathcal{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathcal{P}(A \cup B)^*} \stackrel{\forall A \cap B = \emptyset \vee A \cap B \neq \emptyset}{=} \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)} = \frac{0.5}{0.8 - 0.1} = \frac{5}{7}$$

$$d \mathcal{P}(A|A \cap B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap (A \cap B))}{\mathcal{P}(A \cap B)} = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A \cap B)} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

$$e \mathcal{P}(A \cap B|A \cup B) = \frac{\mathcal{P}((A \cap B) \cap (A \cup B))}{\mathcal{P}(A \cup B)} \stackrel{\mathcal{P}(A \cap B) \neq \emptyset}{=} \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)} = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$$



* Rem.: la probabilité d'union n'a pas encore abordé à ce niveau, mais il est évident qu'elle est déduite de la somme des probabilités des deux ensembles déduite de leur intersection qui ne doit pas être compté à double

2.72 For a certain population of employees, the percentage passing or failing a job competency exam, listed according to sex, were as shown in the accompanying table. That is, of all the people taking the exam, 24 % were in the male-pass category, 16% were in the male-fail category, and so forth. An employee is to be selected randomly from this population. Let A be the event that the employee scores a passing grade on the exam and let M be the event that a male is selected.

a Are the events A and M independent?

b Are the events $\bar{A}$ and F independent?

Issue	Sexe		Total
	Mâle (M)	Fem. (F)	
Réussite (A)	24	36	60
Échec ($\bar{A}$)	16	24	40
Total	40	60	100

2.72 Pour une population donnée d'employés, les pourcentages de réussite ou d'échec à un examen de compétences professionnelles, classés par sexe, sont présentés dans le tableau ci-joint. C'est-à-dire que parmi tous les individus ayant passé l'examen, 24 % étaient des hommes ayant réussi, 16 % étaient des hommes ayant échoué, et et ainsi de suite. Un employé doit être sélectionné au hasard dans cette population. Soit A l'événement suivant : L'employé obtient une note de passage à l'examen et soit M l'événement selon lequel un homme est sélectionné.

a Les événements A et M sont - ils indépendants ?

b Les événements $\bar{A}$ et F sont-ils indépendants ?

Le résultat de réussite peut sembler conditionné par l'appartenance différentielle au sexe, pour être fixé, on doit déterminer les probabilités de réussite pour les 2 sexe , si les deux sont identiques et nécessairement égale à la probabilité totale quelque soient le sexe, cela signifie que le sexe n'a aucun impact sur le passage, donc la réussite est non conditionnelle à l'appartenance sexuelle. On dit procéder de même pour le point b avec l'échec et l'appartenance sexuel. On peu formaliser comme suit;

$$a \mathcal{P}(A|M) = \frac{\mathcal{P}(A \cap M)}{\mathcal{P}(M)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{40}{100}} = 0.6 = \mathcal{P}(A) \Rightarrow A \text{ et } M \text{ sont indépendants}$$

$$b \mathcal{P}(\bar{A}|F) = \frac{\mathcal{P}(\bar{A} \cap F)}{\mathcal{P}(F)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{60}{100}} = 0.4 = \mathcal{P}(\bar{A}) \Rightarrow \bar{A} \text{ et } F \text{ sont indépendants}$$

2.73 Gregor Mendel was a monk who, in 1865, suggested a theory of inheritance based on the science of genetics. He identified heterozygous individuals for flower color that had two alleles (one r = recessive white color allele and one R = dominant red color allele). When these individuals were mated, 3/4 of the offspring were observed to have red flowers, and 1/4 had white flowers. The following table summarizes this mating; each parent gives one of its alleles to form the gene of the offspring.

Parent 1	Parent 2	
	r	R
r	rr	rR
R	Rr	RR

We assume that each parent is equally likely to give either of the two alleles and that, if either one or two of the alleles in a pair is dominant (R), the offspring will have red flowers. What is the probability that an offspring has a at least one dominant allele? b at least one recessive allele? c one recessive allele, given that the offspring has red flowers?

a. Le nombre de combinaisons des 2 allèles différentes en couples caractéristiques de la génétique sexuelle d'1 personne est donné par le produit de 2 allèles par lui-même 1x: $\mathcal{D}(X, Y) = 2^2 = 4$ De cet ensemble 3 sont porteurs de la dominance, donc la probabilité demandée est (on peut aussi représenter cette probab. par le rapport de dimensions de l'évènement au moins 1 dominance sur la dimension de l'ensemble des possibles). On procède de même pour b et c.

$$\mathcal{D}(X, Y) = 2^2 = 4 \quad \text{a } \mathcal{P}(R, Y) = \frac{3}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{3}{4} = \frac{\mathcal{D}(R, X)}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR, rr\})}$$

$$\text{b } \mathcal{P}(r, Y) = \frac{3}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{3}{4} = \frac{\mathcal{D}(r, X)}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{\mathcal{D}(\{rr, rR, Rr\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR, rr\})}$$

La couleur rouge est liée à la présence d'au moins un allèle R, il ne peut y avoir de descendant rr de couleur rouge, donc l'ensemble des possibles est celui des éléments (couplets) dont 1 au moins est R.

$$\text{c } \mathcal{P}(r, Y \neq r, ((X \vee Y) = R)) = \frac{2}{\mathcal{D}((X \vee Y) = R)} = \frac{2}{3} = \frac{\mathcal{D}(r, Y \neq r, (X \vee Y) = R)}{\mathcal{D}((X \vee Y) = R)} = \frac{\mathcal{D}(\{rR, Rr\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR\})}$$

2.74 One hundred adults were interviewed in a telephone survey. Of interest was their opinions regarding the loan burdens of college students and whether the respondent had a child currently in college. Their responses are summarized in the table below:

2.73 Gregor Mendel était un moine qui, en 1865, a proposé une théorie de l'hérédité basée sur la science de la génétique. Il a identifié des individus hétérozygotes pour la couleur des fleurs qui possédaient deux allèles (un allèle r = allèle récessif de la couleur blanche et un allèle R = allèle dominant de la couleur rouge). Lorsque ces individus s'accouplaient, on a observé que les 3/4 de la descendance présentaient des fleurs rouges, et le 1/4 restant des fleurs blanches. Le tableau suivant résume ce croisement ; chaque parent transmet l'un de ses allèles pour former le gène de la descendance.

Nous supposons que chaque parent a une probabilité égale de transmettre l'un ou l'autre des deux allèles et que si un ou deux allèles d'une paire sont dominants (R), la descendance aura des fleurs rouges. Qu'est-ce que la probabilité qu'un descendant ait a au moins un allèle dominant ? b au moins un allèle récessif ? c un allèle récessif, compte tenu que la descendance a des fleurs rouges ?

a. Le nombre de combinaisons des 2 allèles différentes en couples caractéristiques de la génétique sexuelle d'1 personne est donné par le produit de 2 allèles par lui-même 1x: $\mathcal{D}(X, Y) = 2^2 = 4$ De cet ensemble 3 sont porteurs de la dominance, donc la probabilité demandée est (on peut aussi représenter cette probab. par le rapport de dimensions de l'évènement au moins 1 dominance sur la dimension de l'ensemble des possibles). On procède de même pour b et c.

$$\mathcal{D}(X, Y) = 2^2 = 4 \quad \text{a } \mathcal{P}(R, Y) = \frac{3}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{3}{4} = \frac{\mathcal{D}(R, X)}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR, rr\})}$$

$$\text{b } \mathcal{P}(r, Y) = \frac{3}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{3}{4} = \frac{\mathcal{D}(r, X)}{\mathcal{D}(X, Y)} = \frac{\mathcal{D}(\{rr, rR, Rr\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR, rr\})}$$

La couleur rouge est liée à la présence d'au moins un allèle R, il ne peut y avoir de descendant rr de couleur rouge, donc l'ensemble des possibles est celui des éléments (couplets) dont 1 au moins est R.

$$\text{c } \mathcal{P}(r, Y \neq r, ((X \vee Y) = R)) = \frac{2}{\mathcal{D}((X \vee Y) = R)} = \frac{2}{3} = \frac{\mathcal{D}(r, Y \neq r, (X \vee Y) = R)}{\mathcal{D}((X \vee Y) = R)} = \frac{\mathcal{D}(\{rR, Rr\})}{\mathcal{D}(\{RR, Rr, rR\})}$$

2.74 Cent adultes ont été interrogés par téléphone. Leurs opinions étaient d'un grand intérêt. concernant le fardeau des prêts étudiants et si la personne interrogée avait actuellement un enfant à l'université. Leurs réponses sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Enfant à l'Université	Charge du prêt			Total
	Trop élevé (A)	Correcte (B)	Trop faible (C)	
Oui (D)	.20	.09	.01	.30
Non (E)	.41	.21	.08	.70
Total	.61	.30	.09	1

Which of the following are independent events?

a A and D

b B and D

c C and D

Lesquels des événements suivants sont indépendants ?

a A et D

b B et D

c C et D

a. On se trouve dans le même cas de figure que dans l'exercice 2.72. Si la probabilité de A, c'est-à-dire celle qui traduit le coût trop élevé du prêt au total égale celle qui la traduit pour les parents qui ont ou n'ont pas d'enfant inscrit, cela signifie que les événements ne sont pas dépendants. On vérifie ceci en employant les formules conditionnelles pour les 3 cas:

$$a \quad \mathcal{P}(A) = 0.61 \neq 0.6\bar{6} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{\mathcal{P}(A \cap D)}{\mathcal{P}(D)} = \mathcal{P}(A|D) \Rightarrow \text{Les événements A et D sont dépendants}$$

$$b \quad \mathcal{P}(B) = 0.3 = \frac{0.09}{0.3} = \frac{\mathcal{P}(B \cap D)}{\mathcal{P}(D)} = \mathcal{P}(B|D) \Rightarrow \underline{\text{Les événements B et D sont indépendants}}$$

$$c \quad \mathcal{P}(C) = 0.09 \neq 0.03\bar{3} = \frac{0.01}{0.3} = \frac{\mathcal{P}(C \cap D)}{\mathcal{P}(D)} = \mathcal{P}(C|D) \Rightarrow \text{Les événements A et D sont dépendants}$$

2.75 Cards are dealt, one at a time, from a standard 52-card deck. a If the first 2 cards are both spades, what is the probability that the next 3 cards are also spades? b If the first 3 cards are all spades, what is the probability that the next 2 cards are also spades? c If the first 4 cards are all spades, what is the probability that the next card is also a spade?

2.75 Les cartes sont distribuées une à une à partir d'un jeu standard de 52 cartes. a) Si les deux premières cartes sont des piques, quelle est la probabilité que les trois cartes suivantes le soient également piques ? b Si les 3 premières cartes sont toutes des piques, quelle est la probabilité que les 2 cartes suivantes le soient également ? c Si les 4 premières cartes sont toutes des piques, quelle est la probabilité que la carte suivante soit également un pique ?

a. b. c. On recherche ici des probabilités conditionnelles. Il existe 13 cartes par couleur et 2 premières cartes tirées sont des piques, à partir de cette condition on demande la probabilité que les 3 autres tirées parmi les 50 restantes soient des piques, donc 3 piques sur les 11 piques restantes. La probabilité conditionnelle est celle de tirer 2 piques donc une combinatoire qui associe le tirage de 2 piques sur 13 parmi les 52 cartes et cette probabilité est conditionnée à la combinatoire des 5 piques tirée parmi les 13 sur celle de 13 cartes sur 52. Le rapport des 2 selon la formule de probabilité conditionnelle nous donne : a

$$\mathcal{P}(P_3|P_2) = \frac{\mathcal{P}(P_3 \cap P_2)}{\mathcal{P}(P_2)} = \frac{\frac{C_{13}^5}{C_{52}^2}}{\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2}} = \frac{\frac{18!}{5!(13-5)!} \frac{52!}{2!(52-2)!}}{\frac{52!}{(52-5)!5!} \frac{18!}{(13-2)!2!}} = \frac{47!5!11!2!}{5!8!50!2!} = \frac{11 * 10 * 9}{48 * 49 * 50} = \frac{33}{3920} = 0.00841$$

Etant donné que les cartes sont tirées une à une et le résultat est connu de manière continue on peut également considérer la probabilité du premier événement comme le produit des 2 événements conditionnels consécutifs qui le composent, de même pour le second sachant que les deux premières cartes tirées sont des piques, on a alors directement la probabilité conditionnelle:

$$\begin{aligned}
 \text{a } \mathcal{P}(P_3|P_2) & \stackrel{\text{il reste successivement 11,10 cartes sur 48,47..}}{=} \frac{11 * 10 * 9}{48 * 49 * 50} = 0.00841 \\
 \text{b } \mathcal{P}(P_2|P_3) &= \frac{\mathcal{P}(P_2 \cap P_3)}{\mathcal{P}(P_3)} = \frac{\frac{C_{13}^5}{C_{52}^5}}{\frac{C_{13}^3}{C_{52}^3}} = \frac{\frac{13!}{5!(13-5)!} \frac{52!}{3!(52-3)!}}{\frac{52!}{(52-5)!5!} \frac{13!}{(13-3)!3!}} = \frac{47!5!10!3!}{5!8!49!3!} = \frac{10 * 9}{48 * 49} = \frac{90}{392} = 0.03826 \\
 \text{c } \mathcal{P}(P_1|P_4) &= \frac{\mathcal{P}(P_1 \cap P_4)}{\mathcal{P}(P_4)} = \frac{\frac{C_{13}^5}{C_{52}^5}}{\frac{C_{13}^4}{C_{52}^4}} = \frac{\frac{13!}{5!(13-5)!} \frac{52!}{4!(52-4)!}}{\frac{52!}{(52-5)!5!} \frac{13!}{(13-4)!4!}} = \frac{47!5!9!4!}{5!8!48!4!} = \frac{9}{48} = .1875
 \end{aligned}$$

2.76 A survey of consumers in a particular community showed that 10% were dissatisfied with plumbing jobs done in their homes. Half the complaints dealt with plumber A, who does 40% of the plumbing jobs in the town. Find the probability that a consumer will obtain a an unsatisfactory plumbing job, given that the plumber was A. b a satisfactory plumbing job, given that the plumber was A.

2.76 Une enquête menée auprès des consommateurs d'une commune a révélé que 10% d'entre eux étaient insatisfaits des travaux de plomberie effectués à leur domicile. La moitié des plaintes concernaient le plombier A, qui réalise 40 % des interventions de plomberie dans la ville. Déterminez la probabilité qu'un consommateur obtienne a) un travail de plomberie insatisfaisant, étant donné que le plombier était A. b) un travail de plomberie satisfaisant, étant donné que le plombier était A.

a. On recherche la probabilité d'un travail insatisfaisant sachant que le réparateur est le plombier A dont la moitié des plaintes le concernent et que celui-ci réalise 40 % des interventions. On emploie la formule conditionnelle, la condition première est donnée par la probabilité que ce travaille soit effectué par A, donc 0.5 et la seconde qu'il soit insatisfaisant et simultanément effectué par A, donc 0.1 qui représente le taux d'insatisfaction par la fraction d'intervention qui le concerne , Le rapport des deux nous donne donc selon la formule :

$$\text{a } \mathcal{P}(I|A) = \frac{\mathcal{P}(I \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0.1 * 0.4}{0.5} = 8\%$$

Le plombier A a un taux de satisfaction identique de 0.5, mais 0.9 part de consommateur est satisfait du travail dont il est à l'origine de 40 % de ces réparations, donc de même la formule conditionnelle nous donne:

$$\text{b } \mathcal{P}(I|A) = \frac{\mathcal{P}(I \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0.9 * 0.4}{0.5} = 72\%$$

Remarque; étant donné que le 60 % des interventions concernent le ou les autres plombiers, la formule donnerait 12 % d'insatisfaction par rapport aux autres plombiers. On a donc pour moyenne 10 % de plaintes tous plombiers, ce qui montre que le calcul est judicieux. De même , on obtient une moyenne de 90 % de satisfaction de travail fait par les deux partis.

2.77 A study of the posttreatment behavior of a large number of drug abusers suggests that the likelihood of conviction within a two-year period after treatment may depend upon the offenders education. The proportions of the total number of cases falling in four education–conviction categories are shown in the following table:

Éducation	Statut dans les 2 ans après traitement		Total
	Condamné	Non condamné	
10 ans ou plus	.10	.30	.40
9 ans ou moins	.27	.33	.60
Total	.37	.63	1.00

2.77 Une étude du comportement post-traitement d'un grand nombre de toxicomanes suggère que la probabilité d'une condamnation dans les deux ans suivant le traitement pourrait dépendre du niveau d'instruction des contrevenants. La répartition des cas en quatre catégories de condamnation selon le niveau d'instruction est présentée dans le tableau suivant :

Suppose that a single offender is selected from the treatment program. Define the events: A: The offender has 10 or more years of education. B: The offender is convicted within two years after completion of treatment. Find the following:

- a $P(A)$ b $P(B)$
c $P(A \cap B)$ d $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A})$
f $P(\overline{A \cup B})$ g $P(\overline{A \cap B})$ h $P(A|B)$
i $P(B|A)$

Supposons qu'un seul délinquant soit sélectionné parmi les participants au programme de traitement. Définissons les événements : A : Le délinquant a suivi 10 années de scolarité ou plus. B : Le délinquant est condamné dans les deux ans suivant la fin du traitement. Trouvez les éléments suivants :

- a $P(A)$ éducation ≥ 10 ans
b $P(B)$ condamné ≤ 2 ans après traitement
c $P(A \cap B)$ d $P(A \cup B)^*$ e $P(\bar{A})$
f $P(\overline{A \cup B})$ g $P(\overline{A \cap B})$ h $P(A|B)$ i $P(B|A)$

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.40 & P(B) &= 0.37 & P(A \cap B) &= 0.10 & P(A \cup B)^* &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .67 \\ P(\bar{A}) &= 0.60 & P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) = 0.33 & P(\overline{A \cap B}) &= 1 - P(A \cap B) = .90 \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.10}{0.37} = .27 & P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.10}{0.40} = .25 \end{aligned}$$

* La prob. d'union d'ensembles non exclusifs n'a pas encore abordé à ce niveau, mais il est évident qu'elle est déduite de la somme des prob. des 2 ensembles retranchée de leur intersection qui ne doit pas être compté à double. V. ex 2.71

2.78 In the definition of the independence of two events, you were given three equalities to check: $P(A|B) = P(A)$ or $P(B|A) = P(B)$ or $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. If any one of these equalities holds, A and B are independent. Show that if any of these equalities hold, the other two also hold.

2.78 Dans la définition de l'indépendance de deux événements, trois égalités vous ont été données à vérifier : $P(A|B) = P(A)$ ou $P(B|A) = P(B)$ ou $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ Si l'une de ces égalités est vérifiée, A et B sont indépendantes. Montrez que si l'une de ces égalités est vérifiée, les deux autres le sont également

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{(3)}{=} \frac{P(A)P(B)^*}{P(B)} = P(A) & P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \stackrel{(3)}{=} \frac{P(B) * P(A)}{P(A)} = P(B) \\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= P(A|B) \stackrel{(1)}{=} P(A) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B) \\ \frac{P(B \cap A)}{P(A)} &= P(B|A) \stackrel{(2)}{=} P(B) = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B) * P(A) \end{aligned}$$

2.79 If $\mathcal{P}(A) > 0$, $\mathcal{P}(B) > 0$, and $\mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(A|B)$ show that $\mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(A|B)$.
2.79 Si, $\mathcal{P}(A) > 0$, $\mathcal{P}(B) > 0$, et $\mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(A|B)$ monter que $\mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(A|B)$.

$$\mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(A)} \Rightarrow \mathcal{P}(B)\mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(B \cap A) \Rightarrow \frac{\mathcal{P}(B)\cancel{\mathcal{P}(A)}}{\cancel{\mathcal{P}(A)}} < \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \mathcal{P}(B|A)$$

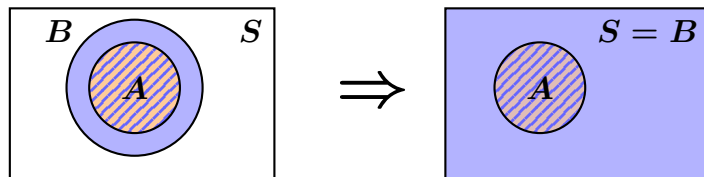
2.80 Suppose $A \subset B$ & that $\mathcal{P}(A) > 0$, $\mathcal{P}(B) > 0$ Are A & B independent? Prove your answer.
2.80 Supposez que $A \subset B$ et que $\mathcal{P}(A) > 0$ et $\mathcal{P}(B) > 0$ Est-ce que A et B sont indépendants ? Justifiez le.

$$B \supset A \Rightarrow \mathcal{P}(B) > \mathcal{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{P}(B \cap A) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A)} = 1 \Rightarrow$$

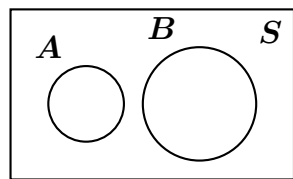
$$\mathcal{P}(B \cap A) = \mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(A) * \mathcal{P}(B)$$

Donc ils sont indépendants à la seule condition que $\mathcal{P}(B)=1$

Dans ce cas là B se confond avec l'univers ou l'espace S



2.81 Suppose that A and B are mutually exclusive events, with $\mathcal{P}(A) > 0$ and $\mathcal{P}(B) < 1$. Are A and B independent? Prove your answer.
2.81 Supposons que A et B soient des événements mutuellement exclusifs, avec $\mathcal{P}(A) > 0$ et $\mathcal{P}(B) < 1$. A et B sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.



Si A et B sont exclusif, cela signifie que leur intersection est nulle et donc
 $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(A|B) = \frac{1}{\mathcal{P}(B)} \neq \frac{\mathcal{P}(A)\cancel{\mathcal{P}(B)}}{\cancel{\mathcal{P}(B)}} = \mathcal{P}(A)$

2.82 Suppose that $A \subset B$ and that $\mathcal{P}(A) > 0$ and $\mathcal{P}(B) > 0$. Show that $\mathcal{P}(B|A) = 1$ and $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)/\mathcal{P}(B)$.
2.82 Supposons que $A \subset B$ et que $\mathcal{P}(A) > 0$ et $\mathcal{P}(B) > 0$. Montrez que $\mathcal{P}(B|A) = 1$ et $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)/\mathcal{P}(B)$.

$$B \supset A \Rightarrow \mathcal{P}(B) > \mathcal{P}(A) > 0 \xrightarrow{\text{ex 2.80}} \mathcal{P}(B \cap A) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A)} = 1$$

$$B \supset A \Rightarrow \mathcal{P}(B) > \mathcal{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

2.83 If A & B are mutually exclusive events & $\mathcal{P}(B) > 0$, show that:
2.83 Si A et B sont des événements mutuellement exclusifs et $\mathcal{P}(B) > 0$, montrez que:

$$\mathcal{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)}$$

$$\mathcal{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)}$$

$$\mathcal{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathcal{P}(A \cup B)} = \frac{\mathcal{P}((A \cap A) \cup (A \cap B))}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)} \stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} \frac{\mathcal{P}(A \cup \emptyset)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - 0} =$$

$$\frac{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\emptyset) - \mathcal{P}(A \cap \emptyset)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)}$$

2.84 If $A_1, A_2, & A_3$ are three events and

$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) \neq 0$ but $\mathcal{P}(A_2 \cap A_3) = 0$ show that : $\mathcal{P}(\text{at least one } A_i)$
 $= \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - 2\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)$

2.84 Si $A_1, A_2, \text{ et } A_3$ sont trois événements et

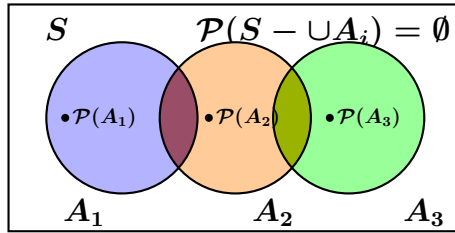
$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) \neq 0$ mais $\mathcal{P}(A_2 \cap A_3) = 0$ montrer que : $\mathcal{P}(\text{au moins un } A_i)$
 $= \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - 2\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)$

Dans la formule à démontrer on retrouve les termes de probabilité d'unions de 3 ensembles, appliquons la formule à A_1, A_2, A_3 ; on obtient en effet selon les conditions posées:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathcal{P}((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) + \mathcal{P}(A_3) - \mathcal{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{P}(A_i) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - \mathcal{P}((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{P}(A_i) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) - \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) + \mathcal{P}((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \\ &\quad \text{Cond.2 : } \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) \quad \sum_{i=1}^3 \mathcal{P}(A_i) - 2\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) - \underbrace{\mathcal{P}(A_1 \cap (A_2 \cap A_3))}_{=0} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{P}(A_i) - 2\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) \\ &\quad \text{Cond.1 : } \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) = 0 \Rightarrow A_2 \cap A_3 = \emptyset \end{aligned}$$

Or on peut traduire la probabilité d'au moins un A_i par la formule suivante , et cette probabilité étant majoré par la probabilité de l'union des 3 ensembles:

$$\mathcal{P}(\text{au moins un } A_i) = \mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^3 A_i) \leq \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - 2\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)$$



Il faut cependant montrer une égalité quelque soient le nbre min. d'ensembles. A cet effet, on emploie le théor. de la complémentarité de la prob., hypothèse sous entendue dans l'énoncé qu'il n'y a aucun autre ens. non vide dans l'espace S (démonstration indirecte comme dans l'exercice 2.60, dém. directe ???):

$$\mathcal{P}(A_i, 1 \leq i) = 1 - \mathcal{P}(\emptyset) = 1 - 0 \stackrel{S = \mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^3 A_i)}{=} \mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^3 A_i) = \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

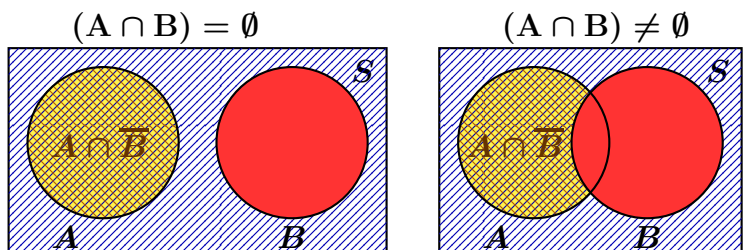
2.85 If A and B are independent events, show that A and $\bar{B}$ are also indep. Are $\bar{A}$ and $\bar{B}$ independent?

2.85 Si A et B sont des événements indépendants, montrez que A et $\bar{B}$ également . Et quid de $\bar{A}$ et $\bar{B}$?

Selon le théorème de la probabilité de 2 évén. indépendants appliqué aux conditions de la donnée (th 2.5, 2.6 La loi multiplicative/additive des prob.) , les lois de la théorie des ensembles et (ex.2.5a2,2.21) les principes tirés de ces lois & axiomes de la déf. 2.6 relatifs à l'union des prob. appliqués à des ens. d'un espace d'échantillonnage , on a :

$$\begin{aligned} 1/ \quad & \underbrace{(A \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = A}_{(A \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = A} \cap ((A \cap B) \cup \bar{B}) = (A \cap ((A \cup \bar{B}) \cap (\bar{B} \cup \bar{B}))) \\ & = ((A \cap A) \cup (A \cap \bar{B})) \cap S = (A \cup (A \cap \bar{B})) \cap S \stackrel{A \text{ et } B \text{ indépendants}}{=} (A \cup A) \cap S = A \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \stackrel{A, B \text{ indep.}}{=} \mathcal{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \\ \stackrel{A, B \text{ indep. / th.2.6}}{=} \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) - \\ \mathcal{P}(A \cap B \cap A \cap \bar{B}) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \\ \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) = 0 \\ \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \stackrel{\text{th.2.6}}{=} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{B}) - \mathcal{P}(A \cup \bar{B}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{B}) - \mathcal{P}(A \cup \bar{B}) \Rightarrow \\ \mathcal{P}(A \cup \bar{B}) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{B}) - \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \\ \mathcal{P}(\bar{B}) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{B}) - \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \\ \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \text{car } A \text{ et } B \text{ sont dépendants ssi } \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) < \mathcal{P}(A) \end{array} \right. \end{aligned}$$

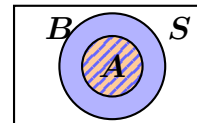
$$\begin{aligned} 2/ \quad & \mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathcal{P}(\bar{A}) + \mathcal{P}(\bar{B}) - \mathcal{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ & \stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} 1 - \mathcal{P}(A) + 1 - \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(S) \stackrel{S = A \cup B}{=} \\ & 2 - (\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)) - 1 = 1 - \mathcal{P}(S) = 0 \Rightarrow \\ & \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ sont indépendants, } A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$



2.86 Suppose that A and B are two events such that $P(A) = 0.8$ and $P(B) = 0.7$. **2.86 Supposons que A et B soient deux événements tels que $P(A) = 0.8$ and $P(B) = 0.7$.**

- a Is it possible that $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$? Why (not)? a) Est-il possible que $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$? Justifiez.
b What is the smallest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$? b) Quelle est la plus petite val. possible pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?
c Is it possible that $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.77$? Why (not)? c) Est-il possible que $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.77$? Justifiez.
d What is the largest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$? d) Quelle est la plus gr. valeur possible pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?

Selon la déf. 2.6, la somme des probabilités des événements indépendants est égale à 1, or la somme des prob. de A et de B est supérieur à 1, donc selon la loi de prob. additive (th 2.6, 2.7) :



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) > 1 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \\ \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) \\ \mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\bar{A}) \\ \mathcal{P}(A \cup B) \leq \mathcal{P}(S) = 1 \quad \text{si } A \cup B = S \quad \mathcal{P}(S) = 1 \\ \text{la somme des probabilités des événements d'un} \\ \text{esp. d'échantillonnage ne peut être supérieur à 1} \Rightarrow \\ \text{si } A \supset B \Rightarrow \\ \text{si } B \supset A \Rightarrow \mathcal{P}(B) > \mathcal{P}(A) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Or pour a) : } \mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{\text{cond. énoncé}}{=} 1.4 > 1 = \mathcal{P}(S) \text{ et} \\ 1 \geq 0.8 + 0.7 - \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) \geq 0.4 \\ \text{a/ } \mathcal{P}(A \cap B) = 0.1 < 0.4 \text{ non possible si } A \cap B \leq S \\ \text{b/ } \mathcal{P}(A \cap B) = 0.4 \\ \text{c/ } \mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{\text{cond. c/}}{=} 0.8 + 0.7 - .77 = 0.73 \Rightarrow \\ 1 \stackrel{S=A \cup B}{=} \mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{\text{contradiction}}{=} 0.73 \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) \neq 0.77 \\ \text{d/ } \mathcal{P}(B) \not> \mathcal{P}(A) \Rightarrow \text{condition nécessaire } B \not> A \\ \text{Or, } A \supset B \stackrel{\text{cond. suff.}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(A \cap B) \stackrel{\mathcal{P}(A) > \mathcal{P}(B)}{\Rightarrow} \mathcal{P}(B) = 0.7 \end{array} \right.$$

2.87 Suppose that A and B are two events such that : $P(A) + P(B) > 1$.

- a What is the smallest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$?
b What is the largest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$?

2.87 Supposons que A et B soient deux événements tels que : $P(A) + P(B) > 1$.

- a) Quelle est la plus pet. val. poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?
b) Quelle est la plus gr. val. poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?

V. exercice 2.86:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) > 1 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \\ \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) \\ - \mathcal{P}(A \cap B) \\ \mathcal{P}(A \cup B) \leq \mathcal{P}(S) = 1 \\ \text{soit } A \supset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) > \mathcal{P}(B) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) + \mathcal{P}(A \cap B) \stackrel{\text{cond. énoncé}}{>} 1 \Rightarrow \\ 1 = \mathcal{P}(S) \geq \mathcal{P}(A \cup B) > 1 - \mathcal{P}(A \cap B) \\ \text{a/ } \mathcal{P}(A \cap B) > 1 - \mathcal{P}(A \cup B) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{P}_{\min} = 0 \\ \text{b/ } A \supset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) \\ \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(B) \quad \text{Or, } \mathcal{P}(A \cap B) = 1 - \mathcal{P}(A \cup B) \\ \stackrel{\text{cond. d'inclus.}}{=} 1 - \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\bar{A}) = \mathcal{P}(B) \end{array} \right.$$

2.88 Suppose that A and B are two events such that $P(A) = .6$ and $P(B) = .3$.

- a) Is it possible that $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$? Why (not)?
b) What is the smallest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$?
c) What is the largest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$?

2.88 Supposons que A et B soient deux événements tels que $P(A) = 0.6$ and $P(B) = 0.3$.

- a Est-il possible que $\mathcal{P}(A \cap B) = 0.1$? Justifiez.
b Quelle est la plus pet. valeur poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?
c Quelle est la plus gr. valeur poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?

a) $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) = 0.8 = \mathcal{P}(A \cup B) \neq 1 = \mathcal{P}(S)$ non poss. si $(A \cup B = S)$ possible si $\exists C \mid S = A \cup B \cup C$ avec $1 = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) - \mathcal{P}(B \cap C) - \mathcal{P}(A \cap B \cap C) \Rightarrow \mathcal{P}(C) = 0.2 + \mathcal{P}(A \cap C) + \mathcal{P}(B \cap C) + \mathcal{P}(A \cap B \cap C)$

$\mathcal{P}(A \cap B) \stackrel{\text{condit. } (A \cup B) = S}{=} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cup B) = 0.9 - 1 = -0.1$ Or, $\forall X \subset S, \mathcal{P}(X) \stackrel{\text{Ax.1 D\'ef 2.6}}{\geq} 0 \Rightarrow$
b) si $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = 0$ c'est la plus petite valeur, puisqu'elle ne peut \^etre n\'egative.
c) et $(A \supset B) = \emptyset \stackrel{\text{cond.suff}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(A \cap B) \stackrel{\mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(B)}{=} \mathcal{P}(A)$ c'est la plus grande valeur.

2.89 Suppose that A and B are two events such that $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) < 1$. **2.89 Supposons que A et B soient deux \^evenements tels que $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) < 1$.**

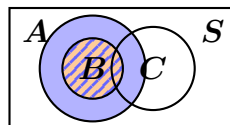
a) What is the smallest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$? a Quelle est la plus pet. valeur poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?
b) What is the largest possible value for $\mathcal{P}(A \cap B)$? b Quelle est la plus gr. valeur poss. pour $\mathcal{P}(A \cap B)$?

$\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cup B) < 1$ soit: $(A \cup B) = S \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) + 1 < 1 \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) < 0$

Or, il y a contradiction avec la d\'efinition 2.6, et $\forall X \subset S \mathcal{P}(X) \stackrel{\text{Ax1 th.}}{\geq} 0 \Rightarrow \exists C \mid S = A \cup B \cup C \Rightarrow$
 $1 = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) - \mathcal{P}(B \cap C) - \mathcal{P}(A \cap B \cap C)$
 $\Rightarrow 1 - \mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap C) + \mathcal{P}(B \cap C) + \mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) < 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) < \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap C) - \mathcal{P}(B \cap C) - \mathcal{P}(A \cap B \cap C)$

a) si $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = 0$ plus pet. val. puisqu'elle ne peut \^etre n\'egative.

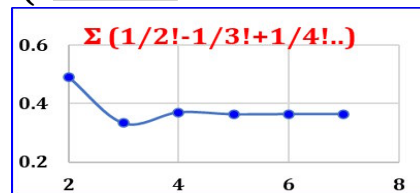
b) soit $(A \supset B) = \emptyset \stackrel{\text{cond.suff}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(A \cap B) \stackrel{\mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(B)}{=} \mathcal{P}(A)$ c'est la plus grande valeur.



2.90 Suppose that there is a 1 in 50 chance of injury on a single skydiving attempt. a If we assume that the outcomes of different jumps are independent, what is the probability that a skydiver is injured if she jumps twice? b A friend claims if there is a 1 in 50 chance of injury on a single jump then there is a 100% chance of injury if a skydiver jumps 50 times. Is your friend correct? Why? **2.90 Supposons qu'il y ait une chance sur 50 de blessure lors d'une seule tentative de saut en parachute. a) Si l'on suppose que les r\'esultats de diff\'erents sauts sont ind\'ependants, quelle est la probabilit\'e qu'une parachutiste soit bless\'ee si elle saute deux fois ? b) Un ami affirme que si le risque de blessure lors d'un seul saut est de 1 sur 50, alors le risque de blessure est de 100 si un parachutiste effectue 50 sauts. Votre ami a-t-il raison ? Pourquoi ?**

a,b) On recherche la prob. de blessure de la parachutiste ayant effectu\'e successivement 2 sauts (1 couple de sauts), on applique donc la loi de prob. additive. Pour montrer qu'elle s'applique dans ce cas de figure, consid\'erons cette prob. du point de vu ensembliste, et comparons les r\'esultats obtenus. On recherche le rapport de la dimension des couples de sauts r\'esultant en 1 accident certain sur le nombre d'observables possibles; couples de sauts d'issues diverses et $2 \times 2 \neq$. L'ens. des \^evenements possibles sont form\'es de sous-ens. de couples de r\'esultats et l'ens. de couple d'\^even. correspondant \^a 1 blessure certaine, le sous-ens. comportant 2 blessures successives cert., le r\'esultat des sauts sont ind\'ependants, les \^elem. des sous-ens. sont donc \'equiprob., ce qui nous permet de poser que la prob. recherch\'ee = rapport des 2 nbr. obtenus. Soit S_i = saut d'ordre i, B = r\'esult. d'1 saut pour 1 "blessure certaine" et N = "aucune", on a donc $S = \{\{B, B\}, \{B, N\}, \{N, B\}, \{N, N\}\}$ et $E = \{\{B, B\}\}$. Appliquons cette hypoth. \^a 1 prob blessure = 0.5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) = \frac{\mathcal{P}(\{B, B\})}{\mathcal{P}(\{S\})} = \frac{1}{4} \\ \mathcal{P}(S_1 \cap S_2) \stackrel{\text{\'even. \'elem ind\'ep.}}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(S_1 \cap S_2) \stackrel{\mathcal{P}(S_i) = \frac{1}{50}}{=} \frac{1}{50} \\ \mathcal{P}_{0.02}(E) = \left(\frac{2}{50}\right)^2 \cong 0.0004 \end{array} \right.$$

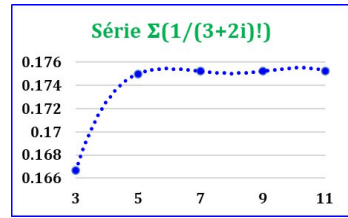


$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_1 \cup S_2) &= \mathcal{P}(S_1) + \mathcal{P}(S_2) - \mathcal{P}(S_1 \cap S_2) \quad \mathcal{P}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) \stackrel{\text{th. 2.6}}{=} \mathcal{P}(S_1 \cup S_2) + \mathcal{P}(S_3) - \mathcal{P}((S_1 \cup S_2) \cap S_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathcal{P}(S_i) - (\mathcal{P}(S_1 \cap S_2) + \mathcal{P}(S_1 \cap S_3) + \mathcal{P}(S_2 \cap S_3)) + \mathcal{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \quad \text{en extapollant pour n sous ensembles} > \\ \mathcal{P}(\cup_{i=1}^n (S_i)) &\stackrel{\forall i \mathcal{P}(S_i) = \frac{1}{n}, \mathcal{P}(\cap_{i=1}^k (S_i)) = (\mathcal{P}(S_i))^k}{=} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(S_i) - \left[\frac{(-1)^2 C_n^{n-2}}{n^2} + \frac{(-1)^3 C_n^{n-3}}{n^3} \dots + \frac{(-1)^{n-2} C_n^2}{n^{(n-2)}} \right] + (-1)^{n-1} \mathcal{P}(\cap_{i=1}^n (S_i)) \Rightarrow \\ \mathcal{P}(\cup_{i=1}^{50} (S_i)) &= 50 \frac{1}{50} - \left[\frac{C_{50}^{48}}{50^2} - \frac{C_{50}^{47}}{50^3} \dots \frac{C_{50}^2}{50^{48}} \right] - \frac{1}{50^{50}} \cong 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots \right] \stackrel{***}{=} 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} \right) + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{5!} \right) \dots \right] \\ &\cong 1 - [e - 2 - 2(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(3+2i)!})] - \frac{1}{50^{50}} \cong \begin{cases} 1 - 0.36416 = 0.63584 & 63.6\% \\ 1 - 0.71828 + 2 * 0.1752 = 0.45672 & 45.7\% \end{cases} \\ \mathcal{P}(\cap_{i=1}^{50} (S_i)) &= 1 - \mathcal{P}(\cup_{i=1}^{50} (S_i)) = \begin{cases} 0.36416 & 36.4\% \\ 0.71828 - 2 * 0.1752 = 0.3678 & 36.8\% \end{cases} \end{aligned}$$

* Les coefficients des combinatoires entre crochets correspondent aux nombres de combinaisons possibles des k-tuples de sauts pris k à k, par ex. avec S1 S2 S3 S3, on peut former 6 intersetsions 1-2 1-3.. équivalents, 4 intersections 1-2-3, 1-2-4 ...

** $\frac{C_{50}^{48}}{50^2} = \frac{50!}{48!2!50^2} = \frac{50 \cdot 49}{2!50 \cdot 50} \cong \frac{1}{2!} \dots$ Comme on les termes dont les dénominateurs sont très grand retranchent et ajoutent des valeurs infimes, on peut faire une bonne approximation jusqu'à 5!, en effet entre le 4ème et le 5ème terme la différence relative est inférieure à 0.4 % et la série tend vers 0.364.

** On peut développer plus, ce qui conduit à une autre série qui a pour limite $2 \cdot 0.175$, mais le résultat final est évidemment approximativement le même.



2.91 Can A and B be mutually exclusive if $P(A) = .4$ and $P(B) = .7$? If $P(A) = .4$ and $P(B) = .3$? Why? 0.4 et $P(B) = 0.7$? Et si $P(A) = 0.4$ et $P(B) = 0.3$? Pourquoi?

a) Soit l'espace S des ens. contenant aussi A et B. Si A et B sont mutuellement exclusifs (indépendants), alors on a :
 $\mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - 0 \stackrel{A \cup B = S}{=} \mathcal{P}(S) \stackrel{\text{Déf. 2.6}}{=} 1$ Or $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = 1.1 > 1 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

b) Mais dans le second cas :

$\mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{\text{Hypothèse } A \cap B = \emptyset}{=} \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + 0 = 0.7 < 1 = \mathcal{P}(S) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ peuvent être mutuellement exclusifs}$

2.92 A policy requiring all hospital employees to take lie detector tests may reduce losses due to theft, but some employees regard such tests as a violation of their rights. Past experience indicates that lie detectors have accuracy rates that vary from 92 to 99%. To gain some insight into the risks that employees face when taking a lie detector test, suppose that the probability is .05 that a lie detector concludes that a person is lying who, in fact, is telling the truth and suppose that any pair of tests are independent. What is the probability that a machine will conclude that each of three employees is lying when all are telling the truth? b at least one of the three employees is lying when all are telling the truth?

2.92 Une politique exige que tous les employés d'un hôpital se soumettent à un test de détecteur de mensonges peut réduire les pertes dues au vol, mais certains employés considèrent ces tests comme une violation de leurs droits. L'expérience passée indique que les détecteurs de mensonges ont des taux de précision variant de 92 à 99 %. Pour mieux comprendre les risques auxquels les employés sont exposés lorsqu'ils passent un test de détecteur de mensonges, supposons que la probabilité soit de 0,05 qu'un détecteur de mensonges conclue qu'une personne dit la vérité alors qu'elle ment, et supposons que deux tests soient indépendants. Quelle est la probabilité qu'une machine conclue que; a) Chacun des trois employés ment alors que tous disent la vérité ? b) Au moins un des trois employés ment alors que tous disent la vérité ?

Les probabilités recherchées dans les 2 cas de figure concernent le résultat du taux d'erreur d'évaluation fausse du détecteur $^*(M)$ affecté à un triplet de trois employés testés en commun dont la probabilité d'authenticité confirmée (V) est équiprobable pour tous les 3 et proche de 0.95. On doit donc rechercher la probabilité d'intersection des trois événements consistant en ce que les trois (i) sont faussement évalués (M) et celle correspondant à ce que l'un au moins du triplet est faussement évalué. Donc on applique la loi des probabilités multiplicatives. La probabilité unitaire d'erreur est complémentaire à celle d'authenticité confirmée (ou précision de véracité du détecteur). On a :

$$\forall i \mathcal{P}(M_i) = 1 - \mathcal{P}(\overline{M_i}) = 1 - \mathcal{P}(V_i) = 1 - 0.95 = 0.05 \Rightarrow$$

$$a) \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^3 M_{A_i}) = \mathcal{P}(M_1)\mathcal{P}(M_2)\mathcal{P}(M_3) = (\mathcal{P}(M_i))^3 = 0.05^3 = \underline{0.000125}$$

b) Dans le second cas, la probabilité recherchée est celle complémentaire à la probabilité qu'aucun des employés ne mente dont l'ensemble de cet événement ne comprend qu'un seul élément constitué du triplet d'employés évalués justement et simultanément comme authentiques :

$$\mathcal{P}(\bigcap_{i>1}^3 M_{A_i}) = 1 - \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^3 \overline{M_i}) = 1 - (\mathcal{P}(V_1)\mathcal{P}(V_2)\mathcal{P}(V_3)) = 1 - (\mathcal{P}(V_i))^3 = 1 - 0.95^3 = \underline{0.999875}$$

*Il aurait été plus judicieux en conformité à la logique formelle de nommer l'erreur d'évaluation du détecteur F (pour évaluation Fausse sur le véridité), mais en désignant M, on reste proche du langage de la logique psychologique d'authenticité d'allégation factuelle (vérité, mensonge), et on désigne dans le problème la mauvaise attribution de véridité, l'affirmation qui est erronée (non vrai), donc un mensonge.

2.93 Two events A and B are such that $P(A) = .2$, $P(B) = .3$, and $P(A \cup B) = .4$. Find the following: $P(A \cap B)$ $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $P(\overline{A} | B)$

$$B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(B) = P((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) - P((\overline{A} \cap B) \cap (A \cap B))$$

$$= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) - \underbrace{P((\overline{A} \cap A) \cap B)}_{=0} \Rightarrow (0) P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Soit } x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$$

$$\Rightarrow (1) \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\text{Soit } x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$$

$$\Rightarrow (2) \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

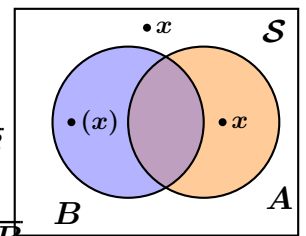
$$\text{Soit } x \in (\overline{A} \cap \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Rightarrow (3) \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\text{Soit } x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$$

$$\Rightarrow (4) \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

$$\text{Loi de DeMorgan p.25 Ch 2} \quad (1 - 2) \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} \quad \text{et } (3 - 4) \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$

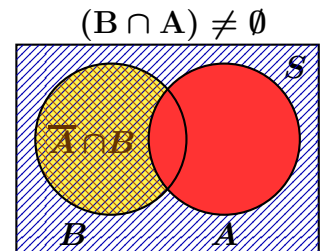


$$a \ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$$

$$b \ (1-2) \ P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$c \ (4-3) \ P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$d \ P(\overline{A} | B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \stackrel{(0)}{=} \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3 - 0.1}{0.3} = \frac{2}{3}$$



2.94 A smoke detector system uses two devices, A and B. If smoke is present, the probability that it will be detected by device A is .95; by device B, .90; and by both devices, .88. a If smoke is present, find the probability that the smoke will be detected by either device A or B or both devices. b Find the probability that the smoke will be undetected.

2.94 Un système de détection de fumée utilise deux appareils, A et B. En présence de fumée, la probabilité que : elle soit détectée par l'appareil A : 0.95; par l'appareil B : 0.90 ; et par les deux appareils : 0.88. a) En présence de fumée, quelle est la probabilité que la fumée soit détectée par l'un ou l'autre, ou par les deux appareils ? b) Quelle est la probabilité que la fumée ne soit pas détectée ?

La probabilité que la fumée soit détectée les deux détecteurs à la fois étant de 0.88, la probabilité recherchée est nécessairement plus grande que 0.88, puisque celle-là comprend celle d'être détectée par l'un, l'autre ainsi que des deux simultanément, on peut l'affirmer sachant que $P(A)$ et $P(B)$ ne sont pas nulles, dans le cas contraire cette probabilité serait justement de 0.88, seul l'événement détection par les deux à la fois existerait. La probabilité recherchée est donnée par celle de l'union des ensembles A et B, qui traduit la probabilité d'être détecté par l'un, l'autre ou les deux à la fois. La probabilité de ne pas être détectée est alors le complémentaire de cette dernière.

$$a \ P_{\text{dét.}}(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.95 + 0.9 - 0.88 = 0.97$$

$$b \ P_{\text{non dét.}}(A \text{ ou } B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.97 = 0.03$$

2.95 In a game, a participant is given three attempts to hit a ball. On each try, she either scores a hit, H, or a miss, M. The game requires that the player must alternate which hand she uses in successive attempts. That is, if she makes her first attempt with her right hand, she must use her left hand for the second attempt and her right hand for the third. Her chance of scoring a hit with her right hand is .7 and with her left hand is .4. Assume that the results of successive attempts are independent and that she wins the game if she scores at least two hits in a row. If she makes her first attempt with her right hand, what is the probability that she wins the game?

2.95 Dans un jeu, une participante dispose de trois essais pour frapper une balle. À chaque essai, elle réussit (R) ou échoue (E). Le jeu exige que la joueuse alterne la main utilisée à chaque essai. Ainsi, si elle effectue son premier essai avec la main droite, elle doit utiliser la main gauche pour le deuxième et la main droite pour le troisième. Sa probabilité de réussir un coup avec la main droite est de 0,7 et avec la main gauche de 0,4. On suppose que les résultats des essais successifs sont indépendants et qu'elle gagne la partie si elle réussit au moins deux coups d'affilée. Si elle tente sa première fois avec sa main droite, quelle est la probabilité qu'elle gagne la partie ?

a Dans ce jeu la joueuse dispose de 3 essais de tirs au maximum et gagne la partie lorsqu'elle réussit son tir au moins deux coups d'affilée. Constituons l'ensemble des sous-ensembles de séquences de réussites ou échec possible. La dimension de cet ensemble est donnée par 2 puissance 3 puisque successivement deux issues possibles peuvent se combiner avec deux issues possibles, ainsi 3 X. La dimension de l'ensemble formé des sous-ensembles comportant une séquence successif d'au moins 2 réussites peut être énuméré en comptant ces sous-ensembles

$$\mathcal{S}_{\text{s.e.}} \{ \{E, E, E\}, \{R, E, E\}, \{E, R, E\}, \{E, E, R\}, \{R, R, E\}, \{R, E, R\}, \{E, R, R\}, \{R, R, R\} \} \dim(S) = 2^3$$

$$\mathcal{E}_{\text{2 réuss. succ.}} \{ \{R, R, E\}, \{E, R, R\}, \{R, R, R\} \} \dim E = 3$$

La probabilité de double réussite sur 2 coups est indépendante de la main avec laquelle elle commence, seul l'ordre des probabilités individuelle change, elle a dans un cas d'abord 0.7 chance puis 0.4 et alternativement 0.4 puis 0.7. Pour 3 coups cette probabilité dépend de la main avec laquelle elle commence le tir puisque qu'avec la main droite celle-ci étant de plus de 50 % plus grande que celle avec la main gauche (G). La probabilité recherchée correspond à celle d'un ensemble de réussite successive de 2 sur trois tirs ordonnés par la séquence GDG, c'est la somme des probabilités de l'intersection d'événements de 2 réussites successives et de trois tirs alternant l'ordre DGD, comme ces deux événements sont indépendants, c'est la somme des probabilités des produits de probabilités de réussite successives double qui sont au nombre de la dimension de E, 3.

$$\mathcal{P}_2(RR \cap DG) (= \mathcal{P}_2(RR \cap GD)) = \mathcal{P}(R_D)\mathcal{P}(R_G) (= \mathcal{P}(R_G)\mathcal{P}(R_D)) = 0.7 * 0.4 = 0.28$$

$$\mathcal{P}_3(RR \cap GDG) = \mathcal{P}((E2_1 \cap (GDG)) \cup (E2_2 \cap (GDG)) \cup (E2_3 \cap (GDG))) \stackrel{\text{ces couples d'év. étant 2 à 2 indép.}}{=} \mathcal{P}(R_G R_D E_G) + \mathcal{P}(E_G R_D R_G) + \mathcal{P}(R_G R_D R_G) = 0.7 * 0.4 * 0.3 + 0.3 * 0.4 * 0.7 + 0.7 * 0.4 * 0.7 = \underline{0.364}$$

2.96 If A and B are independent events with P(A) = .5 and P(B) = .2, find the following: a P(A ∪ B) b P(Ā ∩ B̄) c P(Ā ∪ B̄)

2.93 Deux événements A et B sont tels que P(A) = 0.5, P(B) = 0.2. Déterminez a P(A ∪ B) b P(Ā ∩ B̄) c P(Ā ∪ B̄)

$$\text{a } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} 0.2 + 0.5 = 0.7$$

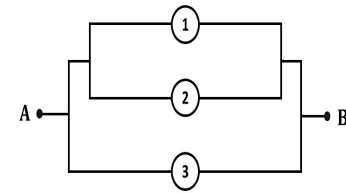
$$\text{b } P(\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{Loi de De Morgan}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\text{c } P(\bar{A} \cup \bar{B}) \stackrel{\text{Loi de De Morgan}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1$$

2.97 Consider the following portion of an electric circuit with three relays. Current will flow from point a to point b if there is at least one closed path when the relays are activated. The relays may malfunction and not close when activated. Suppose that the relays act independently of one another and close properly when activated, with a probability of 0.9. a What is the probability that current will flow when the relays are activated? b Given that current flowed when the relays were activated, what is the probability that relay 1 functioned?

2.97 Considérons la portion suivante d'un circuit électrique comportant trois relais. Le courant circulera du point a au point b s'il existe au moins un chemin fermé lorsque les relais sont activés. Les relais peuvent dysfonctionner et ne pas se fermer lors de leur activation. Supposons que les relais fonctionnent indépendamment les uns des autres et se ferment correctement lors de leur activation, avec une probabilité de 0,9. a) Quelle est la probabilité qu'un courant circule lorsque les relais sont activés ? b) Sachant qu'un courant a circulé lorsque les relais ont été activés, quelle est la probabilité que le relais 1 a fonctionné ?

Pour que le courant circule, il faut qu'au moins un des 3 relais fonctionne. La probabilité qu'un des 3 relais fonctionne équivaut à au complémentaire qu'aucun des 3 relais ne fonctionne. Sachant que la probabilité de dysfonctionnement de chaque relais est de 1-0.9 et que le fonctionnement des relais sont deux à deux indépendants, on a alors :

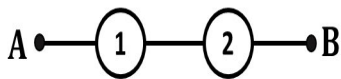


$$a \ P(R_1 \neq 0) \vee (R_2 \neq 0) \vee (R_3 \neq 0) = 1 - P((R_1 = 0) \cap (R_2 = 0) \cap (R_3 = 0)) \stackrel{R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset}{=} 1 - P(R_1 = 0)P(R_2 = 0)P(R_3 = 0) = 1 - 0.1^3 = 0.999$$

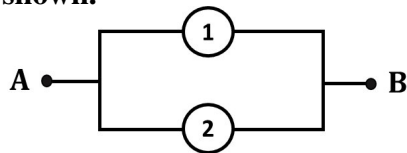
b On emploie à cet effet la probabilité conditionnelle.

$$P(R_1 | ((R_1 \neq 0) \vee (R_2 \neq 0) \vee (R_3 \neq 0))) = \frac{P(R_1 \cap ((R_1 \neq 0) \vee (R_2 \neq 0) \vee (R_3 \neq 0)))}{P((R_1 \neq 0) \vee (R_2 \neq 0) \vee (R_3 \neq 0))} = \frac{0.9}{0.999} = 0.9009$$

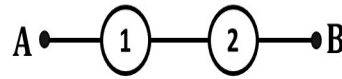
2.98 With relays operating as in Exercise 2.97, compare the probability of current flowing from a to b in the series system shown



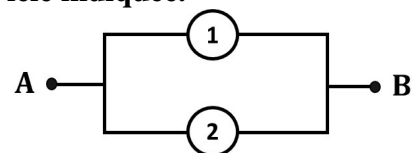
with the probability of flow in the parallel system shown.



2.98 Avec des relais fonctionnant comme dans l'exercice 2.97, comparez la probabilité que le courant circule de a à b dans le système en série illustré.



avec la probabilité d'écoulement dans le système parallèle indiquée.



a On applique le même principe que dans l'exercice précédent. Pour le cas b du circuit parallèle, on recherche le complémentaire à la probabilité qu'aucun relais ne fonctionne qui est dans le sens positif, la probabilité qu'au moins un des deux relais fonctionne. Dans le cas du circuit en série, il est nécessaire que les deux relais fonctionnent, donc la probabilité est ici donnée par la probabilité d'intersection d'événements relais tous 2 simultanément fonctionnels.

$$a \ P_{\dots}(R_1 \neq 0 \cap R_2 \neq 0) \stackrel{R_1 \cap R_2 = \emptyset}{=} P(R_1 \neq 0)P(R_2 \neq 0) = 0.9 * 0.9 = .81$$

$$a \ P_{\parallel} (R_1 \neq 0 \vee R_2 \neq 0) = 1 - P((R_1 = 0) \cap (R_2 = 0)) \stackrel{R_1 \cap R_2 = \emptyset}{=} 1 - 0.1 * 0.1 = 0.99$$

b On peut rechercher également la probabilité que le relais 1 a fonctionné sachant qu'un courant a circulé lorsque les relais on été activé . On applique la probabilité conditionnelle ;

$$b P_{\dots}(R_1 \neq 0 | R_1 \neq 0 \cap R_2 \neq 0) \stackrel{R_1 \cap R_2 = \emptyset}{=} \frac{P(R_1 \neq 0)}{P(R_1 \neq 0)P(R_2 \neq 0)} = \frac{0.9}{0.9 \cdot 0.9} = 1.11$$

Cette réponse semble aberrante et pourtant montre qu'en réalité comme il est nécessaire que les 2 relais soient actifs pour que le courant passe, nécessairement la probabilité que le relais 1 ait fonctionné est de 1.

La probabilité que le relais 1 ait fonctionné dans le circuit parallèle ne peut par contre être égale à un puisque le circuit reste fonctionnel si l'un au moins des relais est fonctionnel et que l'alternative que seul le relais 2 soit fonctionnel est possible et donc rend la probabilité subséquente que le relais 1 soit fonctionnel nulle , ce qui rend le résultat plus petit que 1 et la différence tient compte de cette sous-probabilité nulle.

$$b P_{\parallel} (R_1 \neq 0 | R_1 \neq 0 \vee R_2 \neq 0) \stackrel{R_1 \cap R_2 = \emptyset}{=} \frac{0.9}{0.99} = 0.909$$

2.99 Suppose that A and B are independent events such that the probability that neither occurs is a and the probability of B is b. Show that $P(A) = \frac{1-b-a}{1-b}$

2.99 Supposons que A et B soient des événements indépendants tels que la probabilité qu'aucun des deux ne se produise soit a et la probabilité de B est b. Montrer que $P(A) = \frac{1-b-a}{1-b}$

Traduisons la probabilité tel qu'aucun des événement A ou B ne se produise. A partir de la loi de De Morgan démontrée sous 2.93, on tire la probabilité de la réunion des deux ensembles et tire de la condition de l'énoncé $P(A)$

$$P(\overline{A \vee B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \stackrel{\text{Loi de De Morgan}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = a$$

$$\Rightarrow P(A)(P(B) - 1) = a - 1 + P(B) \Rightarrow P(A) = \frac{a-1+P(B)}{P(B)-1} \stackrel{P(B)=b}{=} \frac{1-b-a}{1-b} \quad \boxed{P(A) = \frac{1-b-a}{1-b}}$$

***2.100 Show that Theorem 2.6, the additive law of probability, holds for conditional probabilities. That is, if A, B, and C are events such that $P(C) > 0$, prove that $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$ [Hint: Make use of the distributive law $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.]**

***2.100 Montrer que le théorème 2.6, la loi additive des probabilités, est valable pour les probabilités conditionnelles. Autrement dit, si A, B et C sont des événements tels que $P(C) > 0$, démontrez que $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$ [Indication : Utilisez la distributivité $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$]**

D'après la définition de la probabilité conditionnelle et la loi de distributivité , on a :

$$P(A \cup B|C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

2.101 Articles coming through an inspection line are visually inspected by two successive inspectors. When a defective article comes through the inspection line, the probability that it gets by the first inspector is .1. The second inspector will “miss” five out of ten of the defective items that get past the first inspector. What is the probability that a defective item gets by both inspectors?

2.101 Les articles passant par une ligne d’inspection sont inspectés visuellement par deux inspecteurs successifs. Lorsqu’un article défectueux arrive sur la chaîne de contrôle, la probabilité qu’il passe le premier contrôle est de 0,1. Le second contrôleur ne détectera pas cinq articles défectueux sur dix qui auront passé le premier contrôle. Quelle est la probabilité qu’un article défectueux passe le contrôle des deux contrôleurs ?

Un dixième des articles défectueux échappe au contrôle du premier inspecteur et la moitié d’entre eux pour le second. Comme on recherche la probabilité que l’article défectueux ne soit détecté par les deux successivement, on doit considérer la probabilité des deux événements en un tenant, probabilité de la conjonction de deux ensembles C_1 et C_2 qui seraient les dimensions de détection certaine de l’article défectueux sur la dimension des possibles, qui sont individuellement de 1 pour 1 total de 10 articles possible pour le 1er contrôleur et 5 pour 10 pour le second. On a :

$$P((C_1 \vee \text{défect.}) \wedge C_2 \vee \text{défect.}) = P((C_1 \cap C_2) \overset{\text{les 2 évén. étant indépend.}}{=} P((C_1)P(C_2) = 0.1 * 0.5 = 0.05$$

La probabilité attendue est plus petite que chacune des deux; en effet l’erreur d’appréciation de chaque contrôleur est inférieur à 100 % , 9 dixième des articles défectueux n’est pas détecté par le premier et sur ce taux , le second a également une appréciation fausse de 50 %, donc au cumul des deux, l’erreur est d’autant plus importante.

2.102 Diseases I and II are prevalent among people in a certain population. It is assumed that 10 % of the population will contract disease I sometime during their lifetime, 15% will contract disease II eventually, and 3 % will contract both diseases. a Find the probability that a randomly chosen person from this population will contract at least one disease. b Find the conditional probability that a randomly chosen person from this population will contract both diseases, given that he or she has contracted at least one disease

2.102 Les maladies I et II sont fréquentes au sein d’une population donnée. On suppose que 10 % de cette population contractera la maladie I au cours de sa vie, 15 % la maladie II et 3 % les deux. a) Déterminez la probabilité qu’une personne choisie au hasard dans cette population contracte au moins une maladie. b) Déterminez la probabilité conditionnelle qu’une personne choisie au hasard dans cette population contracte les deux maladies, sachant qu’elle a contracté au moins une maladie.

a Étant donné qu’au moins 10 % de la population contracte l’une ou l’autre des deux maladies, la probabilité attendue est nécessairement supérieur à 10 % . La probabilité de contracter la seconde est de 15 %, mais comme la première contribue également à 10 %, on a au plus 25 % de la population qui peut être malade, s’il n’y a pas de chevauchement entre les malades de la première maladie et de la seconde. Donc la probabilité attendue est au plus de 25 %. La probabilité recherchée est celle de la conjonction de deux ensembles formés des dimensions des cas possibles de l’une ou l’autre type de maladie (T_1 , T_2), pour lesquelles on a les valeurs distinctes de 0.1 et 0.15. On recherche donc la probabilité de la réunion de cette conjonction d’événements distincts mais non indépendants;

$$P((T_1 \wedge \text{mal.}) \vee T_2 \wedge \text{mal.}) = P((T_1 \cup T_2) = P((T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2) = 0.1 + 0.15 - 0.03 = 0.22$$

b On applique la probabilité conditionnelle à partir de la première réponse , on a la probabilité de contracter les deux ainsi que celle de contracter l’une ou l’autre , donc ;

$$P((T_1 \wedge \text{mal.}) \wedge (T_2 \wedge \text{mal.}) | (T_1 \wedge \text{mal.}) \vee T_2 \wedge \text{mal.}) = \frac{P((T_1 \wedge \text{mal.}) \wedge (T_2 \wedge \text{mal.}))}{P((T_1 \wedge \text{mal.}) \vee T_2 \wedge \text{mal.})} = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1 \cup T_2)} = \frac{0.03}{0.22} = 0.136$$

2.103 Refer to Exercise 2.50. Hours after the rigging of the Pennsylvania state lottery was announced, Connecticut state lottery officials were stunned to learn that their winning number for the day was 666 (Los Angeles Times, September 21, 1980). a All evidence indicates that the Connecticut selection of 666 was due to pure chance. What is the probability that a 666 would be drawn in Connecticut, given that a 666 had been selected in the April 24, 1980, Pennsylvania lottery? b What is the probability of drawing a 666 in the April 24, 1980, Pennsylvania lottery (remember, this drawing was rigged) and a 666 in the September 19, 1980, Connecticut lottery?

2.103 Se référer à l'exercice 2.50. Quelques heures après l'annonce de la fraude à la loterie d'État de Pennsylvanie, les responsables de la loterie d'État du Connecticut ont été stupéfaits d'apprendre que leur numéro gagnant du jour était le 666 (Los Angeles Times, 21 septembre 1980). Tout porte à croire que le tirage du 666 au Connecticut était dû au pur hasard. Quelle est la probabilité qu'un 666 soit tiré au Connecticut, sachant qu'un 666 a été tiré lors du tirage de la loterie de Pennsylvanie du 24 avril 1980 ? b Quelle est la probabilité de tirer un 666 à la loterie de Pennsylvanie du 24 avril 1980 (n'oubliez pas que ce tirage était truqué) et un 666 à la loterie du Connecticut du 19 septembre 1980 ?

Reportons les développement et calculs faits dans l'exercice 2.50, l'espace d'échantillonnage de trio gagnant et la probabilité de gain ;

*Le numéro gagnant est formé de 3 chiffres. La manipulation des conspirateurs rendent le tirage du 4 et du 6 plus fréquent que la statistique aléatoire le dicte. Les combinaisons gagnantes sont donc potentiellement formées de ces deux chiffres dans leur combinaison. il y a 2 chiffre potentiellement gagnant par numéro tiré, donc l'ensemble de l'échantillonnage est formé de $2*2*2=8$ combinaisons gagnantes en tenant compte de l'ordre d'apparition des chiffres. En effet, lorsqu'une boule est tirée, elle est remise dans le dispositif de distribution, donc la probabilité élémentaire pour le tirage de chaque boule est identique et la combinaison totale doit tenir compte de la probabilité élémentaire de chaque tirage individuel. On peut à titre instructif calculer toutes les combinaisons possibles et estimer la probabilité de gain statistique sans cette fraude ;*

L'espace d'échantillonnage, sa dimension (numéros gagnants possibles), probabilité statistique non biaisée.
 $S = \{(6, 6, 6), (4, 6, 6), (6, 4, 6), (6, 6, 4), (4, 4, 6), (4, 6, 4), (6, 4, 4), (4, 4, 4)\}$ $\dim(S) = 2^3 = 8$
 $\dim(T_{x,y,z}) = 10^3 \quad \mathbb{P}(S) = \frac{8}{1000}$

a La probabilité du tirage de triolet de 6 est le rapport d'une combinaison (6,6,6) sur 1000 combinaisons possibles, elle est la même pour les deux état, puisqu'elle repose sur le même principe exposé ci-haut, on a donc selon la probabilité conditionnelle :

$$P(C|P)_{(6,6,6)} = \frac{P(\text{Conn.} \cap \text{Pens.})_{(6,6,6)}}{P(\text{Pens.})_{(6,6,6)}} \stackrel{\text{év. indép.}}{=} \frac{P(\text{Conn.})_{(6,6,6)} P(\text{Pens.})_{(6,6,6)}}{P(\text{Pens.})_{(6,6,6)}} = \frac{\frac{1}{1000} \frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

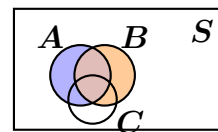
b Comme les balles étaient truquées de manière à ce que nécessairement les numéro 4 ou 6 sortent , en se référant sur la dimension de l'espace d'échantillonnage des séries possiblement tirés du fait de ce trucage, on a une probabilité de 1 sur 8 pour la probabilité de Pennsylvanie, en appliquant la probabilité d'événement conjoints de tirage du triplet de 6 pour les 2 états et ces deux événements étant indépendant , on trouve ;

$$P(\text{Ptruqué})_{(6,6,6)} = \frac{\dim(T_{6,6,6})}{\dim(S_{x,y,z})} = \frac{1}{8}$$

$$P(C \bigwedge \text{Ptruqué})_{(6,6,6)} \stackrel{\text{év. indép.}}{=} P(C_{(6,6,6)}) * P(\text{Ptruqué})_{(6,6,6)} = 0.001 * \frac{1}{8} = 0.000125$$

2.104 If A and B are two events, prove that $P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$ [Note: This is a simplified version of the Bonferroni inequality.] **2.104 Si A et B sont deux événements, démontrer que $P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$. [Remarque : Il s'agit d'une version simplifiée de l'inégalité de Bonferroni.]**

Partons du théorème 2.6 . Si l'univers S comprend aussi C tel que C soit indépendant de A et de B avec C distinct de A et B, alors on a nécessairement la probabilité de l'union de A et de B inférieure à 1



$$\exists C | C \neq \emptyset \wedge P(C \cap A \cup B) \neq 0, \Rightarrow 1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\underline{P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) - 1 = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})}$$

2.105 If the probability of injury on each individual parachute jump is .05, use the result in Exercise 2.104 to provide a lower bound for the probability of landing safely on both of two jumps. **2.105 Si la probabilité de blessure sur chaque saut en parachute individuel est de 0.05, utilisez le résultat de l'exercice 2.104 pour fournir une limite inférieure de la probabilité d'atterrir en toute sécurité sur les deux sauts**

En désignant pas $P(A)$ et $P(B)$, par les probabilité d'atterrir sans blessure et appliquant numériquement l'inégalité simplifiée de Bonferroni , on trouve la probabilité de d'atterrir en sécurité sur un ensemble de 2 sauts successifs:

$$P(A) = P(B) = 0.95 \quad P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.95) - (1 - 0.95) = 0.9.$$

2.106 If A and B are equally likely events and we require that the probability of their intersection be at least .98, what is $P(A)$? **2.106 Si A et B sont des événements équiprobables et que l'on exige que la probabilité de leur intersection soit au moins 0,98, quelle est la valeur de $P(A)$?**

On emploie l'équation du théorème 2.6 en posant qu'il n'existe pas un ensemble C compris dans l'univers S contenant A et B ;

$$\nexists C | C \neq \emptyset \wedge P(C \cap A \cup B) \neq 0, \Rightarrow 1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 \stackrel{\text{donnée énoncée}}{=} 2P(A) - 1 \stackrel{\text{condition de l'énoncée}}{\geq} 0.98 \Rightarrow P(A) = \frac{1.98}{2} \geq 0.99$$

2.107 Let A, B, and C be events such that $P(A) > P(B)$ and $P(C) > 0$. Construct an example to demonstrate that it is possible that $P(A|C) < P(B|C)$. **2.107 Soient A, B et C des événements tels que $P(A) > P(B)$ et $P(C) > 0$. Construisez un exemple pour démontrer qu'il est possible que $P(A|C) < P(B|C)$.**

En posant que $P(B) > P(A)$ avec les diverses conditions de l'énoncé et celles de l'indépendance des ensembles on arrive à démontrer l'inégalité proposée.

$$\text{Soit } P(B) > P(A) \stackrel{P(C) \neq 0}{\Rightarrow} P(B)P(C) > P(A)P(C) \stackrel{\text{si A, B et C sont resp. indép.}}{\Rightarrow} P(B \cap C) > P(A \cap C) \stackrel{P(C) \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{P(B \cap C)}{P(C)} > \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow P(B|C) > P(A|C)$$

2.108 If A, B, and C are three events, use two applications of the result in Exercise 2.104 to prove that $P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C})$. **2.108** Si A, B et C sont trois événements, utilisez deux applications du résultat de l'exercice 2.104 pour démontrer que $P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C})$.

Dém. 1 On prend l'inéquation démontrée sous 2.104 et remplace B par D et pose que D égal B inter C ;

$$\text{Selon dém. 1.104 } P(A \cap D) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{D}) \xrightarrow{\text{Soit } D=B \cap C} P(A \cap D) = P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B \cap C})$$

$$\xrightarrow{\text{Loi de De Morgan dém. ex 2.93}} 1 - P(\bar{A}) - P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{B} \cap \bar{C}) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{B} \cap \bar{C}) \xrightarrow{P(\bar{B} \cap \bar{C}) \geq 0} \underline{1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C})}$$

Dém. 2 Partons du développement de la probabilité de la réunion de 3 ensembles ;

$$P(A \cup B \cup C) = P[A \cup (B \cup C)] = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Si l'univers S comprend aussi D tel que D soit indépendant de A, B et C avec D distinct de A, B et C, alors on a nécessairement la probabilité de l'union de A, B et C inférieure à 1

$$\exists D | D \neq \emptyset \wedge P(D \cap A \cup B \cup C) \neq 0, \Rightarrow$$

$$1 \geq P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \Rightarrow$$

$$1 \xrightarrow{P(X)=1-P(\bar{X})} \geq 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) + 1 - P(\bar{C}) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$-2 + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C}) + P(B \cap C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) \geq P(A \cap B \cap C) \xrightarrow{-a+b \geq c \Rightarrow a-b \leq c}$$

$$2 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \leq P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + 1 - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \text{ Or}$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n P(A_i \cap A_j) \leq 0 \Rightarrow 1 \geq \underbrace{1 - [P(B \cap C) + P(A \cap B) + P(A \cap C)]}_{\epsilon} \geq 0 \Rightarrow$$

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + \epsilon \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C})$$

2.109 If A, B, and C are three equally likely events, what is the smallest value for P(A) such that $P(A \cap B \cap C)$ always exceeds 0.95? **2.109** Si A, B et C sont trois événements équiprobables, quelle est la plus petite valeur de P(A) telle que la probabilité $P(A \cap B \cap C)$ soit toujours supérieure à 0,95 ?

On peut appliquer la formule démontrée dans l'exercice précédente; on pose selon la condition de l'énoncé que la probabilité de l'intersection des 3 événements doit être supérieure à 0.95, sachant que les événements sont équiprobables, on déduit facilement que ;

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) \geq 0.95 \Rightarrow 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C})] \xrightarrow{\forall X P(X)=a} \geq 0.95$$

$$1 - [3 * (1 - P(A))] = -2 + 3P(A) \geq 0.95 \Rightarrow P(A) \geq \frac{2.95}{3} = 0.9833$$

FIN DU CHAPITRE 2.8

2.110 Of the items produced daily by a factory, 40 % come from line I and 60 % from line II. Line I has a defect rate of 8 %, whereas line II has a defect rate of 10 %. If an item is chosen at random from the day's production, find the probability that it will not be defective.

2.110 Dans une usine, 40 % des articles produits quotidiennement proviennent de la ligne I et 60 % de la ligne II. La ligne I présente un taux de défaut de 8 %, tandis que celui de la ligne II est de 10 %. Si l'on choisit un article au hasard parmi la production du jour, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas défectueux ?

Posons les ensembles suivants; D l'ensemble de défectuosité, LD1 LD2, provenant de la ligne 1 et 2 ;L1,L2. On recherche la probabilité du complémentaire de l'union de deux couples d'intersection d'ensembles, soit la probabilité que l'article provenant de la ligne 1 ou 2 au hasard ne soit pas défectueux. Par ailleurs, Chaque ensemble LD1 ou LD2 est l'intersection des ensembles ligne de production et possibilité de défectuosité. On a donc;

$$P(\overline{D}) = P(\overline{LD_1 \cup LD_2}) = P(\overline{(L_1 \cap D_1) \cup (L_2 \cap D_2)}) = 1 - P((L_1 \cap D_1) \cup (L_2 \cap D_2)) = 1 - [P(L_1) * P(D_1|L_1) + P(L_2) * P(D_2|L_2) - * P((L_1 \cap D_1) \cap (L_2 \cap D_2))] \overset{\text{ces couples d'év. sont exclusifs}}{=} 1 - P(L_1) * P(D_1|L_1) - P(L_2) * P(D_2|L_2) = 1 - 0.4 * 0.08 - 0.6 * 0.1 = 0.908$$

Le problème pris dans le sens direct, en recherchant prob. de l'union d'ens. lignes-art. non défectueux > même résultat.

$$P(ND) = P(LND_1 \cup LND_2) = P((L_1 \cap ND_1) \cup (L_2 \cap ND_2)) = P((L_1 \cap ND_1) + (L_2 \cap ND_2)) - P((L_1 \cap ND_1) \cap (L_2 \cap ND_2)) = P(L_1) * P(ND_1|L_1) + P(L_2) * P(ND_2|L_2) - * P((L_1 \cap ND_1) \cap (L_2 \cap ND_2)) \overset{\text{ces couples d'év. sont exclusifs}}{=} P(L_1) * P(ND_1|L_1) + P(L_2) * P(ND_2|L_2) = 0.4 * 0.92 + 0.6 * 0.9 = 0.908$$

* Remarque ; on peut pas appliquer les lois booléennes dans cette composition, et montrer effectivement que $P((L_1 \cap D_1) \cap (L_2 \cap D_2)) = P((L_1 \cap L_2) \cap (D_1 \cap D_2)) = P(\emptyset \cap \emptyset) = 0$

2.111 An advertising agency notices that approximately 1 in 50 potential buyers of a product sees a given magazine ad, and 1 in 5 sees a corresponding ad on television. One in 100 sees both. One in 3 actually purchases the product after seeing the ad, 1 in 10 without seeing it. What is the probability that a randomly selected potential customer will purchase the product?

2.111 Une agence de publicité constate qu'environ 1 acheteur potentiel sur 50 voit une publicité donnée dans un magazine, et 1 sur 5 voit une publicité correspondante à la télévision. 1 sur 100 voit les deux. Un tiers des personnes interrogées achètent le produit après avoir vu la publicité, et une sur dix sans l'avoir vue. Quelle est la probabilité qu'un client potentiel choisi au hasard achète le produit ?

Posons les ensembles suivants; A représentant l'effectif d'achat d'1 client quelconque, A est la réunion de sous-ens. constitués d'élém. achats avisés par une publicité ou non AP et ASP, dont l'un est l'union d'effectifs d'achats associés à la vue de la publicité télévisuelle ou de revue; PTV, PMG. La probabilité recherchée est P(A). On a donc;

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AP \cup ASP) = P((A \cap SP) \cup (A \cap P)) = P(A|SP)P(SP) + P(A|P)P(P) - P((A \cap P) \cap (A \cap SP)) = P(A|SP)P(SP) + \underbrace{P(A|(PTV \cup PMG))}_{P(A|P)}P(P) - \underbrace{P((A \cap A \cap P \cap SP))}_{P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0} \\ &= P(A|SP)P(SP) + [P(A|(PTV)) + P(A|PMG) - P((A|(PTV)) \cap (A|PMG))]P(P) = \\ &= P(A|SP)P(SP) + [P(A|(PTV)) + P(A|PMG) - P(A \cap ((PTV) \cap (PMG)))]P(P) = \\ &= (1 - P(A|P))P(SP) + [P(A|(PTV)) + P(A|PMG) - P(A \cap ((PTV) \cap (PMG)))]P(P) = \\ &= (1 - [\frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{100}]) * \frac{1}{10} + [\frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{100}] * \frac{1}{3} = 0.149 \end{aligned}$$

2.112 Three radar sets, operating independently, are set to detect any aircraft flying through a certain area. Each set has a probability of .02 of failing to detect a plane in its area. If an aircraft enters the area, what is the probability that it is undetected? b is detected by all three radar sets? **2.112 Trois radars, fonctionnant indépendamment, sont configurés pour détecter tout aéronef survolant une zone donnée. Chaque radar a une probabilité de 0,02 de ne pas détecter d'avion dans sa zone. Si un aéronef entre dans la zone, a) quelle est la probabilité qu'il ne soit détecté ? b) soit détecté par les trois radars ?**

Les 3 radars peuvent simultanément détecter l'aéronef, > on recherche la prob. de réunion de possib. de détection individ. ou non;

$$a) P(\overline{D}) = P(\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \overline{D_3}) = P(\overline{D_1}) + P(\overline{D_2}) + P(\overline{D_3}) - P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) - P(\overline{D_1} \cap \overline{D_3}) - P(\overline{D_2} \cap \overline{D_3}) + P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}) \stackrel{\text{les év. de détection étant mutuellement indép.}}{=} 3 * 0.02 - 3 * 0.02^2 + .02^3 = 0.0588$$

$$b) P(D) = P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) - P(D_1 \cap D_2) - P(D_1 \cap D_3) - P(D_2 \cap D_3) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \stackrel{\text{les év. de détection étant mutuellement indép.}}{=} 3 * 0.98 - 3 * 0.98^2 + .98^3 = 0.999992$$

2.113 Consider one of the radar sets of Ex 112. What is the probability that it will correctly detect exactly 3 aircraft before it fails to detect 1, if aircraft arrivals are independent single events occurring at different times? **2.113 Considérons l'un des radars de l'ex 112. Quelle est la probabilité qu'il détecte correctement exactement 3 avions avant de ne pas en détecter 1, si les arrivées d'avions sont des événements uniques indépendants se produisant à des moments différents ?**

En considérant que les passages d'avions sont des évén. indép., se produisant successivement, chaque radar a la même prob. de détecter l'avion de passage, donc la prob. est l'intersection des ensemb. équivalents que sont des possibilités de détection, donc elle est le produit de prob. indiv. . Compte tenu de cette condition, on recherche la prob. que l'avion suivant ne soit pas détecté, donc la probabilité conditionnelle de non détection associée à ce nouv. passage, or la non détection du nv. avion comme de n'importe lequel est indépendante de l'évén. précédent, donc la prob. recherchée est simplement le produit de la probabilité obtenue par la prob. de non détection du nouvel avion;

$$a) P(\overline{D_4} \cap D_{1,2,3}) = P(\overline{D_4} | D_{1,2,3}) * P(D_{1,2,3}) = P(\overline{D}) * P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(\overline{D}) * P(D)^3 = 0.02 * 0.98^3 = 0.01882$$

2.114 A lie detector will show a positive reading (indicate a lie) 10 % of the time when a person is telling the truth and 95 % of the time when the person is lying. Suppose two people are suspects in a one-person crime and (for certain) one is guilty and will lie. Assume further that the lie detector operates independently for the truthful person and the liar. What is the probability that the detector a shows a positive reading for both suspects? b shows a positive reading for the guilty suspect and a negative reading for the innocent suspect? c is completely wrong—that is, that it gives a positive reading for the innocent suspect and a negative reading for the guilty? d gives a positive reading for either or both of the two suspects? **2.114 Un détecteur de mensonges affichera un résultat positif (indiquant un mensonge) 10 % du temps lorsqu'une personne dit la vérité et 95 % du temps lorsqu'elle ment. Supposons que deux personnes soient suspectées d'un crime commis par une seule personne et que l'une d'elles soit certainement coupable et mente. Supposons également que le détecteur de mensonges fonctionne indépendamment pour la personne qui dit la vérité et pour le menteur. Quelle est la probabilité que le détecteur... a) indique un résultat positif pour les deux suspects ? b) indique un résultat positif pour le suspect coupable et un résultat négatif pour le suspect innocent c) est complètement détraqué — c'est-à-dire qu'il donne une lecture positive pour le suspect innocent et une lecture négative pour le coupable ? d) donne un résultat positif pour l'un ou l'autre des deux suspects, voire pour les deux ?**

On peut interpréter le résultat positif comme l'estimation de fausseté du propos employée dans la méthodologie psychologique (v. ex 2.92), et non la justesse d'estimation du détecteur, puisqu'avoir 1 résultat positif (mensonge) pour 1 propos authentique (vérité) semble contraire à la logique de justesse d'évaluation. Comme le détecteur n'est pas infaillible, il peut obtenir 1 résultat positif pour 1 réponse "négative" (non mensongère donc vrai), même si cette valeur d'erreur est très faible.

a) Le détecteur a donc un taux d'erreur de 0.1 lorsque le suspect dit la vérité et a un taux de réussite de 0.95 lorsque celui-ci dit effectivement un mensonge. L'enquête semble affirmer qu'une personne sur les deux suspects est le criminel recherché, et pour le détecteur sa fiabilité est équivalente pour l'un ou l'autre, donc il faut chercher un couple sachant que l'un doit nécessairement dire la vérité, donc la probabilité de l'intersection de couple de résultat dont l'un est faussement évalué, donc de probabilité complémentaire. On a donc ;

$$P(M_{i,j} | i \neq j) = P(M_1 V_2 = M_1 M_2 \cup M_2 V_1 = M_2 M_1) \stackrel{\text{équival. du couple, puisque l'un est assur coupable}}{=} P(M \cap V = M \cap M) \stackrel{\text{les susp étant mutuel. exclusif}}{=} P(M)P(M) = 0.95 * 0.1 = 0.095$$

b) Le résultat étant positif pour le suspect coupable, on a donc la certitude d'affecter une probabilité de 0.95 par exemple au premier suspect considéré comme coupable, l'ordre n'a pas d'importance puisqu'on sait que l'un d'eux est coupable donc sa "position" est fixée dans l'espace d'échantillonnage. De ce fait il ne reste pour le second suspect qu'une alternative entre culpabilité et non culpabilité, mais comme on nous informe que le détecteur révèle un résultat négatif et sachant que celui-ci n'est pas suspect et donc dit la vérité, par conséquent que le détecteur ne commet pas d'erreur, sa probabilité est le complémentaire de 0.1. La probabilité recherchée est celle de l'ensemble de couple associé aux résultats attendus précités et comme ces couples sont indépendants, la culpabilité de l'un excluant celle de l'autre, la probabilité recherchée est le produit des deux probabilités évoquées plus haut, en formatlisant, on trouve :

$$P(M_{1,2} | M_1 = M_C \neq M_2) = P(M_C \cap M_{NC}) = P((M_C | M_{NC}) \cap P(M_{NC}) = P(V) * P(M) = 0.95 * 0.9 = 0.855$$

c) La probabilité recherchée est la réciproque de la précédente, donc il suffit d'inverser l'ordre. La probabilité de lecture positive pour le suspect innocent correspond au résultat d'erreur 0.1 sur la prédiction et la probabilité de lecture négative pour le coupable est le complémentaire de la probabilité d'estimation juste de mensonge donc le complémentaire de 0.95.

$$P(M_{1,2} | M_1 = M_{NC} \neq M_2) = P(M_{NC} \cap M_C) = P((M_{NC} | M_C) \cap P(M_C) = P(M) * P(V) = 0.1 * 0.05 = 0.005$$

d) Pour le dernier point, on peut envisager la probabilité complémentaire de l'événement recherché, c'est à dire la probabilité de donner que des résultats négatifs et calculer celle recherché par différence. Il faut remarquer qu'un des deux est réputé être coupable, donc à nouveau il n'y a pas à tenir compte de deux cas de figures dans la double estimation négative, le couple coupable en premier et non coupable en dernier est équivalent à l'inverse.

$$P(M_{1,2} | M_1 \vee M_2 = M_C \vee M_i = V_i = M_C) = 1 - P(M_1 V_2 = V_1 V_2 \wedge M_2 V_1 = V_2 V_1) \stackrel{\text{équival. du couple, puisque l'un est assur coupable}}{=} 1 - P(M_i V_i = V_i V_j \forall i, j) \stackrel{\text{les doubles év rés pos. étant mutuel. exclusif}}{=} 1 - P(V)P(V) = 1 - (1 - 0.95)(1 - 0.1) = 0.955$$

On a comme attendu : P(a)+P(b)+P(c)= P(d)

2.115 A state auto-inspection station has two inspection teams. Team 1 is lenient and passes all automobiles of a recent vintage; team 2 rejects all autos on a first inspection because their “headlights are not properly adjusted.” Four unsuspecting drivers take their autos to the station for inspection on four different days and randomly select one of the two teams. a If all four cars are new and in excellent condition, what is the probability that three of the four will be rejected? b What is the probability that all four will pass?

2.115 Un centre de contrôle technique automobile dispose de deux équipes d’inspection. L’équipe 1 est indulgente et valide tous les véhicules récents ; l’équipe 2 refuse systématiquement tous les véhicules lors d’une première inspection, sous prétexte que leurs phares ne sont pas correctement réglés. Quatre conducteurs, sans se douter de rien, amènent leur véhicule au centre de contrôle technique à quatre jours d’intervalle et choisissent au hasard l’une des deux équipes a) Si les quatre voitures sont neuves et en excellent état, quelle est la probabilité que trois d’entre elles soient refusées ? b) Quelle est la probabilité que les quatre soient acceptées ?

Analysons le problème d’abord du point de vue ensembliste et par points d’échantillonnages. Les 4 véhicules arrivant successivement tous les jours au centre ont autant de probabilité d’être inspectés par l’une ou l’autre équipe. L’ensemble des événements possibles pour chaque véhicule est constitué de 2 éléments ; contrôle par l’équippe 1, contrôle par l’équippe 2 que l’on symbolisera par + et - pour signifier la validation certaine et refus systématique. La dimension des possibles pour les 4 véhicules est donc la combinatoire de 4 éléments pris parmi les huit combinaisons véhicule-validation possible (4x2) . Et le nombre d’événements caractérisant 3 véhicules refusés est donné par le nombre de combinaison de 3 éléments parmi 4 invalidés et 1 parmi les 4 validés , donc le produit des combinatoires de 4 dans 3 et de 4 dans 1. Le rapport des deux nous donne le résultat recherché.

$$S_{4*2} = \{V1^+V2^+V3^+V4^+, \overline{V1^+V2^+V3^+V1^-}, V1^+V2^+V3^+V2^-, V1^+V2^+V3^+V3^-, V1^+V2^+V3^+V4^-, V1^+V2^+V4^+V1^-, V1^+V2^+V4^+V2^-, V1^+V2^+V4^+V3^-, V1^+V2^+V4^+V4^-, V1^+V2^+V1^-V2^-, V1^+V2^+V1^-V3^-, V1^+V2^+V1^-V4^-, V1^+V2^+V2^-V3^-, V1^+V2^+V2^-V4^-, V1^+V2^+V3^-V4^-, V1^+V3^+V4^+V1^-, V1^+V3^+V4^+V2^-, V1^+V3^+V4^+V3^-, V1^+V3^+V4^+V4^-, V1^+V3^+V1^-V2^-, V1^+V3^+V1^-V3^-, V1^+V3^+V1^-V4^-, V1^+V3^+V2^-V3^-, V1^+V3^+V2^-V4^-, V1^+V3^+V3^-V4^-, V1^+V4^+V1^-V2^-, V1^+V4^+V1^-V3^-, V1^+V4^+V1^-V4^-, V1^+V4^+V2^-V3^-, V1^+V4^+V2^-V4^-, V1^+V4^+V3^-V4^-, V1^+V1^-V2^-V3^-, V1^+V1^-V2^-V4^-, V1^+V1^-V3^-V4^-, V1^+V2^-V3^-V4^-, V2^+V3^+V4^+V1^-, V2^+V3^+V4^+V2^-, V2^+V3^+V4^+V3^-, V2^+V3^+V4^+V4^-, V2^+V3^+V1^-V2^-, V2^+V3^+V1^-V3^-, V2^+V3^+V1^-V4^-, V2^+V3^+V2^-V3^-, V2^+V3^+V2^-V4^-, V2^+V3^+V3^-V4^-, V2^+V4^+V1^-V2^-, V2^+V4^+V1^-V3^-, V2^+V4^+V1^-V4^-, V2^+V4^+V2^-V3^-, V2^+V4^+V2^-V4^-, V2^+V4^+V3^-V4^-, V2^+V1^-V2^-V3^-, V2^+V1^-V2^-V4^-, V2^+V1^-V3^-V4^-, V2^+V2^-V3^-V4^-, V3^+V4^+V1^-V2^-, V3^+V4^+V1^-V3^-, V3^+V4^+V1^-V4^-, V3^+V4^+V2^-V3^-, V3^+V4^+V2^-V4^-, V3^+V4^+V3^-V4^-, V3^+V1^-V2^-V3^-, V3^+V1^-V2^-V4^-, V3^+V1^-V3^-V4^-, V3^+V2^-V3^-V4^-, V4^+V1^-V2^-V3^-, V4^+V1^-V2^-V4^-, V4^+V1^-V3^-V4^-, V4^+V2^-V3^-V4^-, V1^-V2^-V3^-V4^- \}$$

$$\dim(S) = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 2*7*5 = 70$$

$$E = \{V1^+V1^-V2^-V3^-, V1^+V1^-V2^-V4^-, V1^+V1^-V3^-V4^-, V1^+V2^-V3^-V4^-, V2^+V1^-V2^-V3^-, V2^+V1^-V2^-V4^-, V2^+V1^-V3^-V4^-, V2^+V2^-V3^-V4^-, V3^+V1^-V2^-V3^-, V3^+V1^-V2^-V4^-, V3^+V1^-V3^-V4^-, V3^+V2^-V3^-V4^-, V4^+V1^-V2^-V3^-, V4^+V1^-V2^-V4^-, V4^+V1^-V3^-V4^-, V4^+V2^-V3^-V4^- \}$$

$$\dim(E) = C_4^3 * C_4^1 = \frac{4!4!}{3!1!1!3!} = 16$$

$$A) P(3V^-V^+) = \frac{16}{70} = 0.228 \quad B) \quad P(4V^+) = \frac{1}{70} = 0.014$$

*A la fin des résolutions, 2 codes VBA excel permettant de créer les deux listes ci-dessous , respectiv. col G , 8 et 9

A’) On peut en conformité avec l’abord de la théorie du présent chapitre, aborder maintenant le problème du point de vue de composition d’événements. La probabilité individuelle d’être validée pour chaque automobile est de 0.5, donc la même que de ne pas être validée. Si on désigne par V+ l’événement de validation et V- l’événement de refus, on recherche alors la probabilité de l’intersection de quatre événements successif que l’on nomme P(En) avec n=4, tel que les 3 premiers sont V+ parmi 4 choix de véhicules possibles et le dernier V- du dernier restant. La loi multiplicative nous donne;

$$A) \quad \underline{P(E_n^- | n=4)} = C_4^3 * C_1^1 * P(V_1^+ \cap V_2^+ \cap V_3^+ \cap V_4^-) = C_4^3 * C_1^1 * P(V_1^+) * P(V_2^+ | V_1^+) * P(V_3^+ | V_1^+ \cap V_2^+) * P(V_4^- | V_1^+ \cap V_2^+ \cap V_3^+) = C_4^3 * C_1^1 * P(V_1^+) * P(V_2^+ | V_1^+) * P(V_3^+ | V_1^+ \cap V_2^+) * P(\overline{V_4^+} | V_1^+ \cap V_2^+ \cap V_3^+) \stackrel{\text{les } A_i^{+/-} \text{ sont indépendants}}{=} C_4^3 * C_1^1 * P(V_1^+) * P(V_2^+) * P(V_3^+) * P(\overline{V_4^+}) = \frac{4!1!}{3!1!0!1!} * (\frac{1}{2})^3 * (1 - \frac{1}{2}) = 4 * (0.5)^4 = 0.25$$

B') On applique la même logique en remarquant qu'étant donné que les 4 véhicules sont acceptés parmi les 4, le multiplicateur est ici la combinatoire de 4 parmi 4, donc 1.

$$B) \quad \underline{P(E_n^{4+} | n=4)} = C_4^4 * P(V_1^+ \cap V_2^+ \cap V_3^+ \cap V_4^+) = 1 * P(V_1^+) * P(V_2^+) * P(V_3^+) * P(V_4^+) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

A")B") On obtient 2 résultats différents, ce qui signifie que les deux méthodes mesurent deux informations différentes, l'une d'elles est celle recherchée et l'autre répond à une autre question. Laquelle répond à la statistique demandée? Dans l'ensemble de points d'échantillonnages que l'on a constitué, on a considéré que l'automobile était une variable dont il fallait tenir compte et qu'on disposait d'un pool de 8 véhicules-validations différents (4x2). Mais en combinant ces 2 variables, on a introduit une erreur, puisque le pool de véhicule est fixé à 4, dans chaque élément on ne peut avoir que des véhicules différents alors que l'on n'a pas exclu les répétitions de V_i , or on trouve par exemple (V1+V2+V1-V3-), élément qui n'existe pas puisque si V1 a été validé en premier, il ne peut être invalidé le 3ème jour et on ne peut avoir à sa place que le véhicule V4. De plus, les véhicules proviennent d'un pool infini d'automobiles et pour le contrôleur techniques les véhicules sont équivalents. Et de ce fait on a également des couples d'éléments qui sont équivalents, par ex (V1+V4+V2-V3-) et (V2+V3+V1-V4-), puisque dans le rapport statistique du contrôleur seul est dénombré le nombre effectif de validation et invalidation que l'on peut symboliser par (+ + - -). Mais il faut toutefois tenir compte de l'ordre puisque ce ne sont pas les mêmes véhicules et ce nombre est donné par la combinatoire de 4 parmi le nombre de validation ou non. En partant de cette configuration rectifiée l'ensemble des possibles et attendus peuvent être formulés de la manière suivante:

$$S_4 = \{ \{+, +, +, +\}, \{+, +, +, -\}, \{+, +, -, +\}, \{+, +, -, -\}, \{+, -, +, +\}, \{+, -, +, -\}, \{+, -, -, +\}, \{+, -, -, -\}, \{-, +, +, +\}, \{-, +, +, -\}, \{-, +, -, +\}, \{-, +, -, -\}, \{-, -, +, +\}, \{-, -, +, -\}, \{-, -, -, +\}, \{-, -, -, -\} \} \quad , \dim(S) = 2^4 = 16$$

$$\dim(S) \div C_4^0 \{+, +, +, +\} + C_4^1 \{+, +, +, -\} + C_4^2 \{+, +, -, -\} + C_4^3 \{+, -, -, -\}, C_4^4 \{-, -, -, -\} \quad , \dim(S) = \sum_{i=0}^4 C_4^i = 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

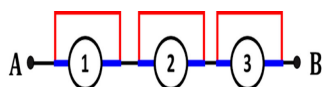
$$E_{3-} = \{ \{+, -, -, -\}, \{-, +, -, -\}, \{-, -, +, -\}, \{-, -, -, +\} \} \quad , \dim(E) = 4 \quad \underline{A'') \quad P(E) = \frac{4}{16} = 0.25}$$

$$E_{4+} = \{ \{+, +, +, +\} \} \quad , \dim(E) = 4 \quad \underline{B'') \quad P(E) = \frac{1}{16} = 0.0625} \quad \text{On retrouve évidemment les mêmes résultats de A') et B').}$$

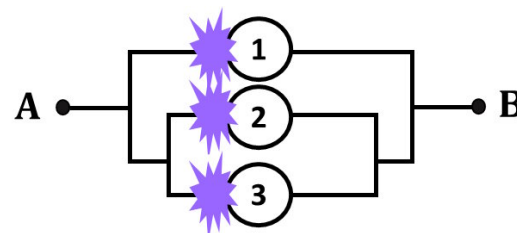
REMARQUE; les probabilités trouvées en A) et B) peuvent être des réponses aux mêmes questions avec l'indication que chaque véhicule pouvait passer 2 fois en ayant nécessairement qu'une validation et que l'élément pouvait être composé d'au plus 4 automobiles différents et au moins 2. Les ensembles correspondraient mieux par exemple à la constitution de quadruplet de 4 allèles de gènes apparentés avec l'alternative de mutation ou non et dans ce cas la première question correspondrait à la probabilité d'avoir exactement 3 allèles mutés. De plus, à partir de la dimension trouvé en A, on ne peut directement diviser celle-ci en un nombre tenant compte des répétitions à exclure, donc cet échantillonnage-ci ne répond pas du tout au problème.

2.116 A communications network has a built-in safeguard system against failures. In this system protection intégré contre les pannes. Dans ce système, si la if line I fails, it is bypassed and line II is used. ligne I tombe en panne, elle est court-circuitée et la ligne II est If line II also fails, it is bypassed and line III is utilisée. Si la ligne II tombe également en panne, elle est court-used. The probability of failure of any one of circuitée et la ligne III est utilisée. La probabilité de panne de these three lines is .01, and the failures of these chacune de ces trois lignes est de 0,01, et les pannes de ces lines are independent events. What is the proba- lignes sont des événements indépendants. Quelle est la proba-bility that this system of three lines does not com- bilité que ce système à trois lignes ne tombe pas complètement pletely fail? en panne ?

Il faut en premier lieu remarquer que l'auteur parle de by-pass et/ou la traduction par court-circuit prête à confusion. A la réflexion, il s'agit d'un premier circuit parallèle 1 // au suivant (2//3), Pour ce problème, on peut utiliser le schéma des circuits combinés des exercices 2.97 et représenter les résistances 1, 2 et 3 par des ronds. D'après la description du fonctionnement on a nécessairement la ligne 1 en // avec les lignes 2 et 3 également en //, lors de la coupure en 1, le courant passe par le second circuit et ainsi de suite. La probabilité recherchée est donnée par le complémentaire à 1 du produit des probabilités de fonctionnement avec panne des 3 circuits à la fois, puisqu'on doit considérer la probabilité de l'événement comprenant l'intégration des 3 lignes à la fois donc le complémentaire a la probabilité d'intersection des 3 événements de disfonctionnement des 3 lignes et que ces lignes ont par ailleurs des probabilités de fonctionnement équivalents et indépendantes.



$$P(E_{1+\cap 2+\cap 3+}) = 1 - P(E_{1-\cap 2-\cap 3-}) = 1 - (0.01)^3 = 0.999999$$

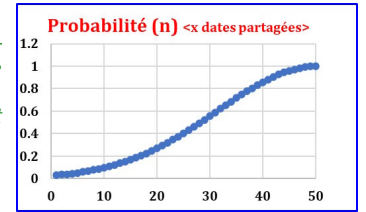


Remarque, on aurait eu tendance à répondre à la question par $P(E) = (1 - 0.01)^3 = 0.970299$, ce résultat correspondrait à la probabilité du fonctionnement des 3 à la fois, or notre réponse comporte les cas de figure où une ou deux lignes au plus ne soient coupées et accepte les cas suivants (+++, ++-, +-..wrx) ; ce qui explique cette minime différence et non une égalité entre les 2 probabilités qui semblent traduire le même événement.

A SUIVRE

A cette probabilité correspond le même $n = ?$ d'avoir 1 anniversaire commun à au moins 2 personnes

Déterminons la probabilité d'avoir exactement 2 personnes (p) nées à la même date pour un ensemble de 2, puis n personnes. La 1ère a 365 dates possibles, la seconde née à la même date n'a donc qu'une possibilité. L'ensemble des possibles pour les deux est le produit de 365 par lui-même. $P = 0.0027$. $\mathbb{P}(2_{d1=d2})_{2/365} = \frac{365 * 1}{365^2} = \frac{1}{365}$



Et pour n personnes avec 2 dates identiques, en employant les formules d'approximations de Stirling et de Taylor et sachant que $a > b > 0$ entraîne $\ln(a) > \ln(b)$, on peut estimer n pour 1 prob. de 0.5. On a identiquement, comme pour le cas de $n=2$, la 1ère personne avec 365 possibilités et la seconde 1, ensuite il reste $n-2$ personnes, comme le 1er couple partage 1 date commune, le 3ème aura donc 365-1 possibilités, et ainsi de suite, en comptant le 1er (365) dans cet ensemble, on a donc au final une factorisation de $n-1$ facteurs commençant par 365-0 jusqu'à 365-($n-2$) qui équivaut à un arrangement de n dans $n-1$. Etant donné que les $n-2$ termes au numérateur sont plus petits que ceux correspondant $(n-2) \times 365$ au dénominateur à partir de cet ordre la prob. est nécessairement plus petit que 0.0027.

$$\mathbb{P}(n_{d1=d2, i \neq j}) = \frac{(365-0) * 1 * \overbrace{(365-1) * .. (365-(n-2))}^{n-2}}{365^n} = \frac{1 * \overbrace{365 * 364 * 363..}^{n-1}}{365^n} = \frac{A_{365}^{n-1}}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - (n-1))!} = \frac{365!}{365^n (365 - n + 1)!} \leq 0.0027 \not\geq \frac{1}{2}$$

$$F! \approx \sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F \Rightarrow \ln(F!) \approx \ln\left(\sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F\right) = \frac{1}{2} \ln(2\pi F) + F \ln(F) - F$$

$$\frac{365!}{365^n (366 - n)!} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n^2 - 1.5n + 1960 \leq 0 \quad \text{comme attendu sans solution dans } \mathbb{R}$$

$$3584.21 + 2n[p(n) - \ln(365)] \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \quad * 365 * 364 * \dots * 2 = 365 * 364 * \dots * 2 * 1$$

$$3584.21 + [732 + 2 * \ln(365)]n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \Rightarrow 3584.21 + 743.8n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1})$$

$$1793 \lesssim n \ln(365) + 1/2 \ln(2\pi(365 - n + 1)) + (365 - n + 1)(\ln(365 - n + 1) - 1) \quad p(n)=365-n+1 \Rightarrow$$

$$2 * 1793 \gtrsim \ln(2\pi) + [2 \ln(365) + \ln(p(n)) - 2p(n)]n + \ln((p(n))^{2p(n)}) \Rightarrow$$

$$3584.21 + 2n[p(n) - \ln(365)] \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \quad * 365 * 364 * \dots * 2 = 365 * 364 * \dots * 2 * 1$$

$$3584.21 + [732 + 2 * \ln(365)]n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \Rightarrow 3584.21 + 743.8n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1})$$

$$1793 \gtrsim n \ln(365) + 1/2 \ln(2\pi(365 - n + 1)) + (365 - n + 1)(\ln(365 - n + 1) - 1) \quad p(n)=365-n+1 \Rightarrow$$

$$2 * 1793 \gtrsim \ln(2\pi) + [2 \ln(365) + \ln(p(n)) - 2p(n)]n + \ln((p(n))^{2p(n)}) \Rightarrow$$

$$3584.21 + 2n[p(n) - \ln(365)] \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \quad * 365 * 364 * \dots * 2 = 365 * 364 * \dots * 2 * 1$$

$$3584.21 + [732 + 2 * \ln(365)]n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1}) \Rightarrow 3584.21 + 743.8n - 2n^2 \gtrsim \ln((p(n))^{2p(n)+1})$$

$$\mathbb{P} = \frac{365!}{365^n (365 - (n-1))!} = \frac{365!}{365^n (365 - n + 1)!} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 * 365! \geq 365^n (365 - n + 1)! \quad \text{OR,}$$

$$F! \approx \sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F \Rightarrow \ln(F!) \approx \ln\left(\sqrt{2\pi F} \left(\frac{F}{e}\right)^F\right) = \frac{1}{2} \ln(2\pi F) + F \ln(F) - F \Rightarrow \ln(2 * 365!) \approx 1793.0$$

$$\ln((p(n))^{2p(n)+1}) = [2(366 - n) + 1] \ln(366 - n) \stackrel{\ln(366-n)=\ln(366)-n/366}{=} 2n^2 - 13.808n + 4326.63$$

$$0 \gtrsim 4n^2 - 757.607n + 742.418 \Rightarrow n^2 - 189.4n + 185.6 \lesssim 0 \Rightarrow \begin{cases} n \lesssim 188 \\ n \lesssim 0.98? \end{cases}$$

La réponse obtenue de $n = 188$ semble cohéremment représenter la limite (supérieure) d'avoir exactement 2 personnes nées le même jour avec une probabilité de 0.5, d'abord parce que plus le nombre de dates communes partagées est statistiquement petit, moins il faut de personnes pour atteindre cette probabilité; on s'attend intuitivement à n bien plus grand pour que 3 personnes partagent une même date sur l'année. Ensuite, le sens de l'inéquation et donc la limite supérieure s'explique par le fait que plus le nombre de personnes diminue plus la probabilité de partage par un seul couple d'une même date augmente (au dessus de 0.5), l'augmentation de ce nombre augmente la probabilité du partage commun de date par un nombre plus grand que 2 au détriment de 2. Par ailleurs, puisque 188 représente à peine plus de la moitié de jours de l'année, chaque personne a statistiquement une date distincte tous les 2 à 3 jours à l'exception d'un couple de personnes, le rapport de 188 à 365 est de 0.51, donc sur un intervalle de 1, statistiquement tous les 0.51 unités on a une personne, c'est-à-dire 1.94 personnes dans cet intervalle, la présence de toutes personnes supplémentaires monterait la présence de personnes à 2.9 par intervalle, dépassant la probabilité correspondante de 0.5 et on se situe nécessairement avec grande probabilité de dépasser le couple de personnes de même anniversaire.

Bien que le problème posé soit plus complexe, le résultat serait identique. La difficulté consiste à déterminer la limite inférieur de n personnes variables tel qu'avec une probabilité d'au moins 0.5, au moins 2 personnes partagent le même anniversaire. La problématique principale réside dans l'élaboration de la formulation mathématique de cet énoncé, comment déterminer la valeur d'une variable dépendante (n) d'un intervalle d'une variable indépendante ($p > 2$) dont une borne est infinie, telle que cette variable même n soit liée à une probabilité appliquée à une condition limite et dans un second temps varie théoriquement à l'infini? La relation de n à p passe par la limite d'une intégrale, ici une somme puisque cette probabilité est somme des probabilités discrètes associées à un nombre variable et continu de personnes jusqu'à la limite imposée par la valeur 0.5. Le postulat statistique nous permet d'établir une relation de limite de probabilité d'une limite de fonction de (n, p) avec n constante en première instance et tel que p tende vers une borne. Déterminons l'équation générale de cette probabilité et appliquons la pour exemple à $p < 5$, $p < 7$. Le nombre de personnes partageant un même anniversaire varie naturellement de 2 à une limite L . Comme indiqué, la probabilité conditionnées par une limite supérieure de 0.5 est la somme de la combinaison de l'ensemble incrémenté des p possibles partageant le même anniversaire combiné aux nombres $n-p$ ne partageant pas la même date sur l'e même ensemble des combinaisons possibles de n -tuples de personnes. Donc, on a également cette somme qui tend vers $0.0027 < 0.5$:

$$\mathbb{P}(n_{i=(1,p)} d_i = d_{ij \neq k})_{n/365} = \sum_{p=2}^n \frac{365 * 1^{p-1}}{365^n} = \frac{365 * 1}{365^2} + \frac{365 * 1^2}{365^3} + \frac{365 * 1^3}{365^4} .. + \frac{365 * 1^{n-1}}{365^n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(n_{i=(1,4)} d_i = d_{ij \neq k})_{n/365} = \sum_{k=1}^4 \frac{1^4 * \overbrace{365 * 364 * 363..}^{n-4}}{365^n} = \sum_{k=1}^4 \frac{1^k * 365!}{365^n (365 - n + (p - 1))!} \geq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(n_{i=(1,4)} d_i = d_{ij \neq k})_{n/365} = \frac{1 * 365 * 364 * 363 + 1^2 * 365 * 364 + 1^3 * 365}{365^n} = \frac{6.32 * 10^{12}}{365^n} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n \lesssim 5.11$$

$$\mathbb{P}(n_{i=(1,6)}) = \frac{365 + 365 * 364 + 365 * 364 * 363 + 365 * 364 * 363 * 362 + 365 * 364 * 363 * 362 * 361}{365^n}$$

$$\mathbb{P}(n_{i=(1,6)}) = \frac{8.16 * 10^{17}}{365^n} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n \lesssim 7.1$$

a la limite de n tel que 2 personnes exactement partagent le même anniversaire : 188. On peut aussi calculer individuellement cette limite pour 3,4..n pers. partageant une même date avec une formule analogue à celle développée plus haut

$$\mathbb{P}((n, p)p > 2) = \sum_{p=2}^n \frac{365 * 1^{(p-1)} * 364 * 363..}{365^n} \stackrel{365*364*..2*1=365*364*..*2}{=} \sum_{p=2}^n \frac{1^{p-1} * 365!}{365^n (365 - n + (p - 1))!}$$

$$\mathbb{P}((4, p)p > 2) = \frac{365 * 1 * 364 * 363 + 365 * 1^2 * 364 + 365 * 1^3}{365^5} \approx 0.0027 > \mathbb{P}(6) \approx 0.002673$$

Mais, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((n, p)p > 2) \rightarrow 0$ $\mathbb{P}((2, 2)) \approx 0.0027$ intrapolé sans calcul et déjà vu plus haut

Cette probabilité ne peut être supérieure ou égale à 0.5 et la valeur attendu de n n'existe pas

FAUX On a en fait la même formule à la différence que la 1ère et 2ème pers. ont indifféremment 365 dates disponibles

et la suite est décrémente de 2 unités; $\mathbb{P}(N_{d1=d2i \neq j})_{365} = \frac{365 * 365 * 363 * 362..}{365^n} = \frac{365^2 * 363!}{365^n (363 - n + 2)!} =$

$$\frac{(365 - n) A_{363}^n}{365^{n-2} (363 - n + 2) (363 - n + 1)}$$

Essayons de résoudre l'inéquation suivante en posant que pour 2 dates identiques, la probabilité est > 0.5 ;

$$0.5 \leq \frac{365^2 * 363!}{365^n (363 - n + 2)!} = \mathbb{P}(N_{d_{N1=N2i \neq j}})_{P \geq 0.5} \Rightarrow 365^{n-2} (363 - n + 2)! \leq 2 * 363!$$

On peut d'ores et déjà faire quelques approximations grossières. Comme n est assez petit devant 365, on a pour:

$$n \ll 365 \Rightarrow 365^{n-2} (363 - n + 2)! \leq 2 * 363! \Rightarrow n - 2 \lesssim \frac{\ln(2)}{\ln(363)} = 0.11 \Rightarrow n = 2.11$$

Donc la probabilité que deux personnes soient né le même jour est d'une demie?